Corso di Laurea Triennale in Chimica

Precorso di Matematica

A.A. 2022/2023

Prof.ssa Addolora Salvatore

Indice

Cenni di teoria degli insiemi. Insiemi numerici

Un insieme è un gruppo ben definito di enti, ciascuno dei quali è un elemento dell'insieme stesso.

Per definire un insieme bisogna precisare quali sono i suoi elementi elencandoli oppure dandone la proprietà caratteristica.

Es $A = \{a, e, i, o, u\}$ oppure $A = \{$vocali dell'alfabeto italiano$\}$

Per indicare che a appartiene all'insieme A si scrive $a \in A$.
Per indicare che b non è elemento di A, si scrive $b \notin A$.

Definizione Dati A, B insiemi, si dice che A è contenuto in B, oppure che A è un sottoinsieme di B se ogni elemento di A appartiene a B, cioè

$$A \subseteq B \iff \forall x \in A : x \in B$$

Si dice che A è strettamente contenuto in B oppure che A è un sottoinsieme proprio di B se A è contenuto in B ma esiste almeno un elemento di B che $\notin A$, cioè

$$A \subset B \iff A \subseteq B \text{ e } A \neq B$$

Operazioni tra insiemi

$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ l'unione di due insiemi è un nuovo insieme formato dagli elementi appartenenti ad A o a B

$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ l'intersezione di due insiemi è un nuovo insieme formato dagli elementi appartenenti sia ad A che a B.

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$ il prodotto cartesiano di due insiemi è un nuovo insieme formato da coppie ordinate dove il 1° elemento appartiene ad A e il 2° elemento appartiene a B.

Def Si chiama operazione o legge di composizione interna per un insieme A una funzione che ad ogni coppia di elementi di A associa un elemento di A ed uno solo.

Insiemi numerici

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ insieme dei numeri naturali

$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ insieme dei numeri naturali escluso lo 0.

Su $\mathbb{N}$ è possibile definire due operazioni, + e $\cdot$, tali che $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ verifica le seguenti proprietà:

1) $\forall a, b \in \mathbb{N}: a + b = b + a$ (proprietà commutativa per la +)
2) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: (a+b)+c = a+(b+c)$ (proprietà associativa per la +)
3) $\exists\, 0 \in \mathbb{N} \ni' a + 0 = a \ (= 0 + a)$ (esiste l'elemento neutro per la +)
4) $\forall a, b \in \mathbb{N}: a \cdot b = b \cdot a$ (proprietà commutativa per la $\cdot$)
5) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (proprietà associativa per la $\cdot$)
6) $\exists\, 1 \in \mathbb{N} \ni' a \cdot 1 = a \ (= 1 \cdot a)$ (esiste l'elemento neutro per la $\cdot$)
7) $\forall a, b, c \in \mathbb{N}: (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (proprietà distributiva)

N.B. In $\mathbb{N}$ si può fare la sottrazione solo se il minuendo è più grande o uguale al sottraendo ponendo (se $a \geq b$)
$a - b \stackrel{def}{=} c \iff a = b + c$

In $\mathbb{N}$ si può fare la divisione solo se il dividendo è multiplo del divisore ponendo (se $a = bc, b \neq 0$)
$a : b \stackrel{def}{=} c \iff a = b \cdot c$

$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$ insieme dei numeri relativi

Su $\mathbb{Z}$ è ancora possibile definire la somma e il prodotto in modo che $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ verifichino le proprietà (1)-(7) e inoltre

8) $\forall a \in \mathbb{Z} \; \exists -a \in \mathbb{Z} \ni' a + (-a) = 0 \; (= (-a) + a)$ (esiste l'elemento opposto $\forall a \in \mathbb{Z}$)

Grazie alla proprietà 8) è sempre possibile in $\mathbb{Z}$ fare la sottrazione. Si definisce infatti

$$a - b \overset{def}{=} a + (-b) \qquad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

(la sottrazione è un caso particolare dell'addizione)

Si ha ovviamente: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}^*$ dove $\mathbb{Z}^* = \{+1, -1, +2, -2, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ insieme dei numeri ~~relativi~~ razionali

$\mathbb{Q}$ è ancora munito di addizione e moltiplicazione e $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ verifica le proprietà (1)-(8) e inoltre posto $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$,

(9) $\forall a \in \mathbb{Q}^* \; \exists a^{-1} \in \mathbb{Q} \ni' a \cdot a^{-1} = 1 \; (= a^{-1} \cdot a)$ (esistenza dell'inverso per ogni $a \in \mathbb{Q}, a \neq 0$)

N.B. In $\mathbb{Q}$ si può sempre fare la divisione per un numero $\neq 0$ (oltre che la sottrazione). Si definisce infatti

$$a : b \overset{def}{=} a \cdot b^{-1} \qquad \forall a, b \in \mathbb{Q}, \; b \neq 0$$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ campo dei numeri razionali.

Inoltre su $\mathbb{Q}$ (ma anche su $\mathbb{Z}$) si può introdurre una relazione di ordine $\leq$ nel modo seguente: $a \leq b \Leftrightarrow b - a \geq 0$.

La $\leq$ verifica le seguenti proprietà

i) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ ($\leq$ compatibile con $+$)

ii) $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$: $a \leq b \wedge c \geq 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$ ($\leq$ compatibile con $\cdot$)

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ campo ordinato completo.

Si ha ovviamente

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

OSS. Un numero razionale, dopo aver eseguito la divisione, si può sempre ricondurre a un numero decimale limitato (cioè con parte decimale finita) o decimale illimitato periodico, cioè con parte decimale illimitata ma con un gruppo di cifre che si ripete infinite volte.

Precisamente si vede che

- Una frazione (ridotta ai minimi termini) si riconduce a un numero decimale limitato se il suo denominatore contiene come fattori primi solo 2 e/o 5

  Es. $\frac{21}{4}$, $\frac{37}{25}$, $\frac{13}{40}$

- Una frazione (ridotta ai minimi termini) si riconduce a un numero decimale periodico semplice, cioè con periodo che segue subito la virgola, se il suo denominatore non contiene come fattori primi né 2 né 5.

  Es. $\frac{5}{9}$, $\frac{17}{7}$, $\frac{8}{33}$, $\frac{20}{63}$.

- Una frazione (ridotta ai minimi termini) si riconduce a un numero decimale periodico misto, cioè tra la virgola e il periodo c'è un gruppo di cifre detto antiperiodo, se il denominatore contiene i fattori primi 2 e/o 5 e altri numeri.

  Es. $\frac{7}{12}$, $\frac{3}{13}$, $\frac{37}{35}$, $\frac{1}{26}$.

Vale anche il viceversa:

- Ogni numero decimale finito si può scrivere sotto forma di frazione dove al numeratore compare il numero senza la virgola e al denominatore c'è 1 seguito da tanti zeri quante sono le cifre decimali.

Es. $0,15 = \frac{15}{100}$ (basta moltiplicare per 100 numer. e den.)

$78,214 = \frac{78214}{1000}$ (" " per 1000)

- La frazione generatrice di un numero decimale periodico ha per numeratore il numero senza la virgola diminuito del numero formato dalle cifre che precedono il periodo e per denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti 0 quante sono quelle dell'antiperiodo.

Es. $0,\overline{13} = \frac{13}{99}$ $\qquad 27,\overline{2} = \frac{272}{9}$

$0,2\overline{13} = \frac{213-2}{990}$ $\qquad 2,18\overline{4} = \frac{2184-218}{900} = \frac{1966}{900} = \frac{983}{450}$.

<u>OSS</u> Ogni numero decimale periodico con periodo = 9 è uguale al numero decimale limitato che si ottiene da quello dato aumentando di una cifra l'ultima cifra che precede il periodo e tralasciando ciò che segue.

Es. $0,36\overline{9} = \frac{369-36}{900} = \frac{333}{900} = \frac{37}{100} = 0,37$

Viceversa, ogni numero decimale limitato si può scrivere sotto forma di numero decimale periodico (diminuendo di una ~~cifra~~ unità l'ultima cifra decimale e facendola seguire dal periodo 9).

$$7,63 = 7,62\overline{9}$$

Conclusione Ogni numero razionale si può scrivere come numero decimale illimitato periodico.

Prop. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

DIM per assurdo. Supponiamo che la tesi sia falsa, cioè $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, quindi $\exists\ m, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, primi tra loro (altrimenti si semplifica) tali che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Elevando al quadrato si ha $2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2 = 2n^2$ (*) e quindi m^2 pari $\Leftrightarrow$ m pari (perché nella scomposizione in fattori primi di m^2 intervengono gli stessi fattori presenti nella scomposizione di m). Dunque

$\exists\ k \in \mathbb{N}$ t.c. $m = 2k$. Sostituendo nella (*) si ha

$4k^2 = 2n^2$ cioè $n^2 = 2k^2$ cioè n^2 pari $\Leftrightarrow$ n pari.

Ma questo è assurdo perché avevamo supposto m e n primi tra loro e quindi, in particolare, non entrambi pari. Dunque $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Consideriamo allora l'insieme dei numeri irrazionali

$\mathbb{I} = \{$numeri decimali illimitati aperiodici$\}$.

$\sqrt{2} \in \mathbb{I}$, ma anche tutte le radici quadrate di interi che non sono "quadrati perfetti" ($\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots$), le radici cubiche di numeri che non sono "cubi perfetti" ($\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \dots$) e così via.

Si considera quindi $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$, cioè

$\mathbb{R} = \{$allineamenti decimali con parte decimale infinita periodica e a-periodica$\}$ insieme dei numeri reali.

Su $\mathbb{R}$ si definiscono le operazioni di somma e prodotto in modo che $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ verifica le proprietà 1) – 9) e quindi si parla di campo dei numeri reali. Inoltre si introduce la $\leq$ che risulta compatibile con + e $\cdot$, cioè valgono le proprietà i) – ii), e quindi $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ è un campo ordinato al pari di $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$.

Dalle proprietà 1) – 9) seguono varie altre proprietà; ad esempio

<u>Legge di annullamento del prodotto</u>

Dati $a, b \in \mathbb{R}$: $\quad a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$

<u>DIM</u> $\Leftarrow$ Basta provare che $\forall\, a \in \mathbb{R}$: $a \cdot 0 = 0$.

Infatti $\quad a \cdot 0 \overset{3)}{=} a \cdot (0+0) \overset{7)}{=} a \cdot 0 + a \cdot 0 \overset{8)}{\Rightarrow}$ sommo $-(a \cdot 0)$ ad ambo i membri

$$\underbrace{a \cdot 0 + (-(a \cdot 0))}_{\overset{8)}{=}\ 0} = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-(a \cdot 0)) \overset{2)}{=} \underbrace{a \cdot 0 + (a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)))}_{\overset{8)}{=}\ a \cdot 0 + 0 \ \overset{3)}{=}\ a \cdot 0}$$

Dunque $a \cdot 0 = 0$.

$\Rightarrow$ Sia $a \cdot b = 0$. Supponiamo $a \neq 0$ e quindi per 9) moltiplicando per a^{-1} si ha:

$$\underbrace{a^{-1} \cdot (a \cdot b)}_{\overset{5)}{=}\ a^{-1} \cdot a \cdot b \ \overset{6)}{=}\ 1 \cdot b = b} = a^{-1} \cdot 0 \underset{\text{per } \Leftarrow}{=} 0$$

e dunque $b = 0$.

Altre conseguenze della struttura di campo di R

- $-(a+b) = -a-b$ (l'opposto di una somma è uguale alla somma degli opposti)
- $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ (l'inverso di un prodotto è uguale al prodotto degli inversi)

Attenzione: $-a \cdot b = (-a) \cdot b = a \cdot (-b)$ ma $-a \cdot b \neq (-a) \cdot (-b)$

$$(a+b)^{-1} \neq a^{-1} + b^{-1}$$

Es. $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}$ ma $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$!

Conseguenze della compatibilità della $\leq$ rispetto al prodotto:

$$\forall a \in R: \quad a^2 \geq 0$$

Infatti se $a \geq 0 \Rightarrow a \cdot a \geq 0 \cdot a$ cioè $a^2 \geq 0$

se $a \leq 0 \Rightarrow a \cdot a \geq 0 \cdot a$ cioè $a^2 \geq 0$

Teorema (radice n-esima)
$\forall a > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists! b \geq 0 \ \ni' b^n = a$. Tale numero si chiama radice n-esima di a e si denota con il simbolo $\sqrt[n]{a}$.

OSS Se $a < 0$ e n è dispari si pone $\sqrt[n]{a} \stackrel{def}{=} -\sqrt[n]{-a}$ essendo $(-\sqrt[n]{-a})^n = -(\underbrace{\sqrt[n]{-a}}_{-a>0})^n = -(-a) = a$. Invece non ha senso parlare di $\sqrt[n]{a}$ se $a < 0$ e n pari essendo il quadrato di un numero sempre ≥ 0.

Monomi e polinomi

Def Si dice monomio una espressione algebrica in cui compaiono solo moltiplicazioni tra lettere.

Es. $-\frac{4}{3}x^2y$ monomio che ha coefficiente $-\frac{4}{3}$ e parte letterale x^2y.

Si chiama grado del monomio la somma degli esponenti delle sue lettere.
Es. grado $(-\frac{4}{3}x^2y) = 2+1 = 3$.

- Due monomi si dicono simili se hanno la stessa parte letterale.

Es. $+\frac{1}{5}ab^4c$, $-\frac{2}{3}ab^4c$ sono monomi simili.

- La somma di due o più monomi simili è uguale a un monomio simile ai dati e avente per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.

Es. $2ab^2 + (-\frac{1}{3}ab^2) - 5ab^2 = (2-\frac{1}{3}-5)ab^2 = -\frac{10}{3}ab^2$.

- Il prodotto di due o più monomi (non necessariamente simili) si ottiene moltiplicando i coefficienti tra loro e le parti letterali tra loro.

Es. $\frac{1}{3}ab \cdot (-2ac^2) = -\frac{2}{3}a^2bc^2$

- La potenza di un monomio si fa facendo la potenza del coefficiente e la potenza della parte letterale.

Es. $(3ab^2)^4 = 81a^4b^8$

Def. La somma di più monomi si chiama polinomio.

Es. $x^2y - 2xy + y^4$

Si chiama grado di un polinomio il massimo dei gradi dei monomi che lo compongono.

Es. $gr(\frac{2}{3}xy - \frac{1}{4}x^2y + y^5) = 5$ essendo i monomi che lo compongono di grado 2, 3 e 5.

- La somma di 2 polinomi è un polinomio che si ottiene sommando tutti i termini dei 2 polinomi simili e riscrivendo gli altri.

Es. $(x^3y - 2x^2 + z) + (-3x^3y + 2x^2 + z^2) =$

$x^3y - \cancel{2x^2} + z - 3x^3y + \cancel{2x^2} + z^2 = -2x^3y + z + z^2$.

- Il prodotto di un monomio per un polinomio è un polinomio che si ottiene moltiplicando ciascun termine del polinomio per il monomio.

Es. $2xy \cdot (-3x + 4xy - y^2) = -6x^2y + 8x^2y^2 - 2xy^3$.

- Il prodotto di 2 polinomi è un polinomio i cui termini si ottengono moltiplicando ciascun termine di un polinomio per tutti i termini dell'altro.

Es. $(xy + x^2)(-\frac{1}{2}x + y^2) = -\frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}x^3 + xy^3 + x^2y^2$.

Prodotti notevoli

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Divisione tra polinomi

- Un polinomio P_1 si dice divisibile per un polinomio P_2 se esiste un terzo polinomio Q t.c. $P_1 = P_2 \cdot Q$.

P_1 dividendo $\quad P_2$ divisore $\quad Q$ quoziente

- In genere si prova che dati due polinomi P_1 e P_2, $P_2 \neq 0$, esistono e sono univocamente determinati due polinomi Q e R tali che

$P_1 = P_2 \cdot Q + R \qquad Q$ quoziente $\qquad R$ resto

Segue che P_1 è divisibile per $P_2 \iff R = 0$

Es.

$$
\begin{array}{l|l}
3x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 11x + 1 & x^2 - 3x \\
\cline{2-2}
3x^4 - 9x^3 & 3x^2 - x - 2 \\
\hline
// \quad -x^3 - 5x^2 + 11x + 1 & \\
\quad -x^3 + 3x^2 & \\
\hline
// \quad -2x^2 + 11x + 1 & \\
\quad -2x^2 + 6x & \\
\hline
// \quad 5x + 1 &
\end{array}
$$

$Q(x) = 3x^2 - x - 2$

$R(x) = 5x + 1$

Divisibilità di un polinomio per un binomio del tipo $x-\alpha$.

Teorema Un polinomio $P(x)$ è divisibile per un binomio $x-\alpha$
$\iff P(\alpha)=0$ cioè α è radice del polinomio

Es. x^3+x^2-9x-9 è divisibile per $x-3$ perché $P(3)=0$

Per fare la divisione di un polinomio $P(x)$ per un binomio $x-\alpha$ si può anche usare la regola di Ruffini:

	1	1	-9	-9
3		3	12	9
	1	4	3	//

Il polinomio quoziente è
$Q(x)=x^2+4x+3$
Il resto è 0

Dunque: $x^3+x^2-9x-9=(x-3)(x^2+4x+3)$.

Regola pratica per determinare le radici di un polinomio

Dato il polinomio $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n=0$
le sue eventuali radici intere si cercano tra i divisori del termine noto a_n, le sue eventuali radici razionali sono del tipo $\frac{p}{q}$ con p divisore di a_n e q divisore del coefficiente di grado massimo a_0.

Esempio Scomporre il polinomio $3x^3-4x^2+5x-4$

E' necessario determinare delle radici del polinomio e poi dividere per $x-\alpha$.

Le eventuali radici intere sono tra i divisori di -4 cioè
$\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4$. Poiché $P(1)=3-4+5-4=0 \Rightarrow 1$ è radice
$P(-1)=-3-4-5-4\neq 0$ In genere le radici di P non possono essere negative!

$P(2)=24-16+10-4\neq 0$ $\quad P(4)=3\cdot 64-4\cdot 16+20-4\neq 0$

Le eventuali radici razionali (non intere) vanno cercate del tipo $\pm\frac{1}{3},\ \pm\frac{2}{3},\ \pm\frac{4}{3}$ ma sostituendo si vede che nessuno di questi numeri è radice del polinomio. Dividiamo ora $P(x)$ per $x-1$

	3	-4	5	-4
1		3	-1	+4
	3	-1	4	//

Dunque

$$3x^3-4x^2+5x-4=(x-1)(3x^2-x+4)$$

Es. Scomporre il polinomio $3x^3+2x^2-7x+2$.

Si vede subito che $x=1$ e $x=-2$ sono radici del polinomio.

Quindi

	3	2	-7	2
1		3	5	-2
	3	5	-2	//
-2		-6	2	
	3	-1	//	

Dunque

$$3x^3+2x^2-7x+2=(x-1)(3x^2+5x-2)$$
$$=(x-1)(x+2)(3x-1).$$

Divisibilità

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\dots x^1a^{n-2}+a^{n-1}) \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

Se n è pari: x^n-a^n è divisibile anche per la somma delle basi

$$x^n-a^n=(x+a)(x^{n-1}-x^{n-2}a+\dots+xa^{n-1}-a^{n-1})$$

Se n è dispari: x^n+a^n è divisibile per la somma delle basi

$$x^n+a^n=(x+a)(x^{n-1}-x^{n-2}a+\dots+xa^{n-1}-a^{n-2})$$

Se n è pari

x^n+a^n non si può decomporre nella somma o nella differenza delle basi.

Es.

$$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$x^4-y^4=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$$
$$=(x+y)(x^3-x^2y+xy^2-y^3)$$

x^4+y^4 non si può decomporre nella somma $x+y$ o diff $x-y$.

Es. Trovare m.c.m. e M.C.D. tra $x^3-7x^2+20x-24$ e $2x^4+128$.

È necessario scomporre i 2 polinomi.

Le eventuali radici intere del primo polinomio sono da ricercare tra i divisori di -24 cioè tra $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm8, \pm12, \pm24$.

In realtà le radici non possono essere negative essendo $P(\alpha)<0 \ \forall \alpha<0$.

Si vede che $P(1) = 1-7+20-24 \neq 0$ $\quad P(2) = 8-28+40-24 \neq 0$

$P(3) = 27-63+60-24 = 0$ Dunque P divisibile per $x-3$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -7 & 20 & -24 \\ 3 & & 3 & -12 & 24 \\ \hline & 1 & -4 & 8 & // \end{array}$$

$$x^3 - 7x^2 + 20x - 24 = (x-3)(x^2-4x+8)$$

Il polinomio non ha altre radici reali, come si vedrà facilmente una volta nota la formula risolvente delle equazioni di II° grado.

$$2x^4 + 128 = 2(x^4+64) \underset{\substack{\downarrow \\ \text{completamento del quadrato}}}{=} 2(x^4+64+16x^2-16x^2) = 2[(x^2+8)^2-(4x)^2]$$

Segue che

$$2x^4 + 128 = 2(x^2+8-4x)(x^2+8+4x).$$

Si conclude che

$$\text{m.c.m.}\{x^3-7x^2+20x-24,\ 2x^4+128\} = 2(x-3)(x^2+4x+8)(x^2-4x+8)$$

$$\text{M.C.D.}\{x^3-7x^2+20x-24,\ 2x^4+128\} = x^2 - 4x + 8$$

Equazioni

- Si chiama equazione una uguaglianza fra due espressioni letterali che è verificata solo per particolari valori assegnati alle lettere.
- Si chiama identità una uguaglianza fra due espressioni letterali che è verificata ~~solo~~ per qualunque valore dato alle lettere che in esse figurano.

Es. $(x+1)^2 = 1$ equazione (l'uguaglianza vale solo per $x=0$ oppure $x=-2$)

$(x+1)^2 = x^2+2x+1$ identità (l'uguaglianza vale $\forall x \in \mathbb{R}$)

Risolvere un'equazione significa trovare i valori che sostituiti alle incognite verificano l'uguaglianza.

Due equazioni si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

In genere per risolvere un'equazione si cerca di trasformarla in un'altra ad essa equivalente ma di forma più semplice.

I° Principio di equivalenza

Aggiungendo ad ambo i membri di un'equazione una stessa quantità si ottiene un'equazione equivalente.

Conseguenze

- Se uno stesso termine figura nei due membri dell'equazione, esso può essere soppresso (ciò equivale a sottrarre dai 2 membri quel termine).
- Si può spostare un termine da un membro all'altro purché si cambi di segno (basta ragionare come sopra).

II° Principio di equivalenza

Moltiplicando ambo i membri di un'equazione per una stessa quantità $\neq 0$ si ottiene un'equazione equivalente.

Conseguenze

- Cambiando di segno tutti i termini di un'equazione se ne ottiene una equivalente.

Equazioni di I° grado o lineari

In forma normale, cioè nella forma più semplice possibile, sono del tipo

$ax + b = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$

Se $a \neq 0$: $x = -\frac{b}{a}$ unica sol. Equazione determinata

$a = 0 \wedge b = 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ x è sol. " " indeterminata

$a = 0 \wedge b \neq 0$ $\quad \nexists x$ sol. " " impossibile

Es. $\frac{5-4x}{8} - \frac{11-2x}{12} = \frac{1}{24} - \frac{x+1}{3}$ Moltiplico x 24 = m.c.m tra i denominatori

$\underline{15} - \cancel{12x} - \underline{22} + \cancel{4x} = \underline{1} - \cancel{8x} - \underline{8} \iff 0 \cdot x = 0$ eq. indeterminata $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{6x+4}{4x^2+4x+1} + \frac{2}{4x^2-1} = \frac{1}{2x+1} + \frac{2-\frac{4x}{2x+1}}{\frac{4x^2-1}{4x^2+2x}} \iff$$ posto $4x^2+2x \neq 0$ cioè $x \neq 0,\ x \neq -\frac{1}{2}$

$$\frac{6x+4}{(2x+1)^2} + \frac{2}{(2x+1)(2x-1)} = \frac{1}{2x+1} + \frac{2}{2x+1}\cdot\frac{2x(2x+1)}{(2x-1)(2x+1)}$$ m.c.m. $=(2x+1)^2(2x-1)$

$$(6x+4)(2x-1)+2(2x+1)=(2x+1)(2x-1)+4x(2x+1)$$ se $\begin{cases} x\neq 0 \\ 2x+1\neq 0 \\ 2x-1\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x\neq -\frac{1}{2} \\ x\neq \frac{1}{2}\end{cases}$

$$\cancel{12x^2}+8x-6x-4+\cancel{4x}+2=\cancel{4x^2}-1+\cancel{8x^2}+\cancel{4x}$$

$2x=+1 \qquad x=+\frac{1}{2}$ non accettabile! L'equazione è impossibile.

- $\frac{5(x-1)}{2} - \frac{2x-3}{12} - 1 = \frac{x-13}{6}$ m.c.m. $=12$

$30x-30-2x+3-12=2x-26 \iff 26x=13 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ eq. determ.

Sistemi di 2 equazioni in 2 incognite di I° grado

Si consideri il sistema

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$ $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$ di 2 equazioni in 2 incognite.

Poiché il grado di un sistema è dato dal prodotto dei gradi delle singole equazioni che lo compongono, il sistema è di I° grado.

Metodo di sostituzione: si ricava un'incognita in un'equazione e si sostituisce nell'altra, che diventa quindi un'equazione in una sola incognita che, risolta, fornisce il valore di questa incognita. Sostituendo il valore trovato nell'altra equazione, si ottiene il valore della 2ª incognita.

Es. $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 3x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+9x-9=13 \\ y=3x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11x=22 \\ y=3x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$

Metodo di confronto

Si ricava una stessa incognita nelle 2 equazioni e si confrontano i due valori ottenuti ricavando così l'altra incognita. Sostituendo il valore trovato in una delle due equazioni si ottiene il valore dell'altra.

Es. $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 3x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{13-2x}{3} \\ y=3x-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3x-3 \\ \dfrac{13-2x}{3}=3x-3 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} y=3x-3 \\ 13-2x=9x-9 \end{cases} \quad \begin{cases} y=3x-3 \\ 22x=11 \end{cases} \quad \begin{cases} y=3 \\ x=2 \end{cases}$

Metodo di addizione e sottrazione

Si trasformano le due equazioni in altre equivalenti che hanno i coefficienti di una stessa incognita uguali. Sottraendo membro a membro le due equazioni, se ne ottiene una terza in una sola incognita che, risolta, ne fornisce il valore. Per trovare l'altra incognita si può usare lo stesso procedimento o si potrà proseguire per sostituzione.

Es. $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 3x-y=3 \end{cases}$ Moltiplico la 2ª per 3 e sommo membro a membro

$\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 9x-3y=9 \end{cases}$

$11x + // = 22 \Rightarrow \begin{cases} y=3x-3 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3 \\ x=2 \end{cases}$

Metodo di Cramer

Dati 4 numeri reali p, q, r e s si chiama determinante e si denota con $\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}$ il numero reale $ps-qr$.

In un sistema di due equazioni di primo grado in due incognite il valore di ogni incognita è uguale ad una frazione avente al ~~denominatore~~ denominatore il determinante dei coefficienti delle incognite e al numeratore il determinante che si ottiene sostituendo al posto della colonna dei coefficienti dell'incognita cercata la colonna dei termini noti.

$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases} \qquad x=\dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}=\dfrac{b'c-bc'}{ab'-a'b} \qquad y=\dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}}=\dfrac{ac'-a'c}{ab'-a'b}.$

N.B. Se $ab' = a'b \Leftrightarrow \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ il sistema risulterà

impossibile se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ (le 2 eq. hanno uguali i primi membri e non i secondi)

indeterminato se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ (le due equazioni sono uguali a meno di un coefficiente)

Es. $\begin{cases} 2x + 3y = 13 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-13-9}{-2-9} = \frac{22}{11} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{6-39}{-2-9} = \frac{33}{11} = 3$$

• $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 6x - 4y = 8 \end{cases}$ Si vede subito che il sistema è impossibile perché dividendo per 2 la seconda equazione diventa

$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$ impossibile perché la quantità $3x - 2y$ non può essere contemporaneamente uguale a 5 e a 4.

• $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 6x - 4y = 10 \end{cases}$ Il sistema è indeterminato perché dividendo per 2 la seconda equazione si ha

$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$ cioè le 2 equazioni coincidono e quindi esistono infinite soluzioni.

Disequazioni

Due disequazioni si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni. Per semplificare una disequazione si può applicare il I° criterio di equivalenza (aggiungendo ad ambo i membri di una disep. una stessa quantità si ottiene una disep. equivalente) e il II° criterio di equivalenza (moltiplicando per una quantità >0 si ottiene una disep. equivalente).

Una disequazione di I° grado in forma normale è del tipo

$ax + b \geq 0$ (ovvero $\leq$, $>$, $<$) $\xrightarrow{a>0}$ $x \geq -\frac{b}{a}$ (ovvero $\leq$, $>$, $<$) Es. $3x - 2 < 0$ $x < 2/3$

Equazioni di II° grado. Disequazioni.

$ax^2+bx+c=0 \qquad a,b,c \in \mathbb{R} \qquad a \neq 0$

Se $c=0$ $\quad ax^2+bx=0 \iff x(ax+b)=0 \qquad x=0,\ x=-\frac{b}{a}$ soluzioni
(l'equazione si dice spuria)

Se $b=0$ $\quad ax^2+c=0 \iff x^2=-\frac{c}{a} \iff \begin{cases} x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}} & \text{se } ac\leq 0 \\ \text{impossibile} & \text{se } ac>0 \end{cases}$

Equazione completa $(a,b,c\neq 0)$

Moltiplicando per $4a$ e aggiungendo e sottraendo b^2 si ha

$4a^2x^2+4abx+4ac+b^2-b^2=0 \iff (2ax+b)^2=b^2-4ac$

$\iff 2ax+b=\pm\sqrt{\Delta}$ dove $\Delta=b^2-4ac$.

Si ottiene così la formula risolvente: $x_{1/2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$.

OSS Se $\Delta>0$ l'equazione ha 2 radici reali distinte

Se $\Delta=0$ " " coincidenti

Se $\Delta<0$ l'equazione non ha radici reali

Formula ridotta: $x_{1/2}=\dfrac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{\Delta}{4}}}{a}$ con $\frac{\Delta}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$.
(se b è pari)

Es.

- $\dfrac{2x-3}{x-1}-1=\dfrac{x^2-4}{2x-2} \iff 4x-\cancel{6}-2x+\cancel{2}=x^2-\cancel{4} \qquad x-1\neq 0$

$\iff x^2-2x=0 \qquad x(x-2)=0 \qquad \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix}$ acc.ti

- $\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-1\right)=\dfrac{\sqrt{6}-2}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \implies \sqrt{6}x^2-3\sqrt{2}x=3\sqrt{6}-6-x\sqrt{3} \qquad x\neq 0$

$\sqrt{6}x^2-(3\sqrt{2}-\sqrt{3})x-3(\sqrt{6}-2)=0$

$\Delta=(3\sqrt{2}-\sqrt{3})^2+12\sqrt{6}(\sqrt{6}-2)=18+3-6\sqrt{6}+72-24\sqrt{6}=(3\sqrt{2}-5\sqrt{3})^2$

$x_{1/2}=\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}\pm(3\sqrt{2}-5\sqrt{3})}{2\sqrt{6}}= \begin{cases} \dfrac{6\sqrt{2}-6\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{2} & \text{acc.} \\ \dfrac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} & \text{acc.} \end{cases}$

- $\frac{x-1}{2x-1} + \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{5x-4}{2x^2-3x+1}$ poiché m.c.m $= (2x-1)(x-1) = 2x^2-3x+1$

si ha $(x-1)^2 + x(2x-1) = 2x^2-3x+1+5x-4$ $\quad x \neq 1 \wedge x \neq \frac{1}{2}$

$$x^2 - 2x + \cancel{1} + \cancel{2x^2} - \cancel{x} = \cancel{2x^2} - \cancel{3x} + \cancel{1} + 5x - 4$$

$x^2 - 5x + 4 = 0 \qquad x_{1/2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 1 & \text{non acc.} \\ 4 & \text{acc.} \end{cases}$ L'equazione ha solo la sol. $x = 4$.

Relazioni tra le soluzioni e i coefficienti di una equazione di II° grado

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Conseguenze: 1) $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$. (scomposizione del trinomio se $\Delta \geq 0$)

Infatti $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - (x_1+x_2) + x_1 \cdot x_2\right)$

$$= a(x-x_1)(x-x_2).$$

2) In un'equazione di secondo grado con $\Delta \geq 0$ ad ogni variazione (cambio di segno di 2 coefficienti consecutivi) corrisponde una soluzione positiva e ad ogni permanenza (stesso segno di due coefficienti negativi) una radice negativa. Se l'equazione ha 2 soluzioni discordi, la radice di valore assoluto maggiore è positiva se la variazione precede la permanenza ed è negativa se la permanenza precede la variazione (Regola di Cartesio)

Es. $x^2+3x+2=0 \qquad \Delta > 0$ 2 radici negative poiché ci sono 2 permanenze

$x^2-3x+2=0 \qquad \Delta > 0$ 2 radici positive poiché ci sono 2 variazioni

$3x^2+7x-1=0 \qquad \Delta > 0$ 1 radice positiva e 1 negativa Poiché c'è prima la permanenza è maggiore in valore assoluto quella negativa

Dalla scomposizione del trinomio segue la seguente regola.

Regola del segno del trinomio

Se $\Delta > 0$ il trinomio è concorde con a per valori esterni all'intervallo delle sue radici, è discorde con a per valori interni.

Se $\Delta = 0$ il trinomio è sempre concorde con a tranne per $x = -\frac{b}{2a}$ in cui si annulla.

Se $\Delta < 0$ il trinomio è sempre concorde con a.

DIM Basta osservare che

Se $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ concorde con a se $x < x_1$ o $x > x_2$

Se $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c = a\underbrace{(x - x_1)^2}_{\geq 0}$ concorde con a se $x \neq x_1$

Se $\Delta < 0$: $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)$

$= a\left[\underbrace{\left(x + \frac{b}{a}\right)^2}_{\geq 0} - \underbrace{\frac{\Delta}{4a^2}}_{< 0}\right]$ concorde con a $\forall x \in \mathbb{R}$.

Disequazioni di II° grado

- $x^2 - x - 2 > 0$ $\quad \Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ $\quad x_{1/2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases}$

  $x < -1 \vee x > 2$

- $3x^2 - 5x + 2 \leq 0$ $\quad \Delta = 25 - 24 = 1 > 0$ $\quad x_{1/2} = \frac{5 \pm 1}{6} = \begin{cases} 2/3 \\ 1 \end{cases}$

  $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$

- $9x^2 + 6x + 1 > 0$ $\quad \frac{\Delta}{4} = 9 - 9 = 0$ $\quad x_{1/2} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}$

  $\forall x \in \mathbb{R} - \{-\frac{1}{3}\}$

- $9x^2 + 6x + 1 \geq 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $9x^2 + 6x + 1 < 0$ $\quad \emptyset$
- $9x^2 + 6x + 1 \leq 0$ $\quad$ solo per $x = -\frac{1}{3}$.

Equazioni di grado superiore. Disequazioni.

Si cerca di scomporre il polinomio nel prodotto di fattori di I° e II° grado e poi si applica la legge di annullamento del prodotto. In alcuni casi particolari si riesce a ricondursi allo studio di equazioni di II° grado con un'opportuna sostituzione.

Equazioni biquadratiche: $ax^4+bx^2+c=0$

Posto $x^2=t$ si risolve l'eq. di II° grado $at^2+bt+c=0$ e poi si ricava x tornando alla sostituzione.

Es. $9x^4-13x^2+4=0$ $\quad \Delta = 13^2-9\cdot 16 = 169-144=25$

$x^2=t \to 9t^2-13t+4=0$ $\quad t_{1,2} = \frac{13\pm 5}{18} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{8}{18}=\frac{4}{9} \\ 1 \end{array}\right.$

$x^2=\frac{4}{9} \Rightarrow x=\pm\frac{2}{3}$, $x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

L'equazione ha 4 radici reali a due a due opposte (si poteva prevedere essendo $\Delta>0$ e 2 radici $t_1, t_2>0$ per la Regola di Cartesio)

- $9x^4-30x^2+25=0$ $\quad \Delta=0$
  $(3x^2-5)^2=0 \iff x^2=\frac{5}{3}$ $\quad x=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$ $\quad$ radici reali opposte a due a due coincidenti
- $4x^2+x^2+1=0$ $\quad \Delta<0$ $\quad \nexists$ sol. reali
- $x^2+4x+1=0$ $\quad \frac{\Delta}{4}>0$ $\quad$ l'eq. in t ha 2 radici negative (2 permanenze) e quindi la biquadratica non ha radici reali

Equazioni binomie: $x^n=a \iff \begin{cases} x=\pm\sqrt[n]{\ } & \text{se } n \text{ pari} \wedge a\geq 0 \\ \nexists x & \text{se } n \text{ pari} \wedge a<0 \\ x=\sqrt[n]{a} & \text{se } n \text{ dispari} \wedge a\in\mathbb{R} \end{cases}$

Es. $3x^3-1=0 \Rightarrow x^3=\frac{1}{3}$ $\quad x=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

$x^4+2=0$ $\quad x^4=-2$ $\quad \nexists$ $\quad x^4-1=0 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{1}=1$

Equazioni trinomie : $ax^{2n}+bx^n+c=0$

Si pone $x^n=t$ e si studia $at^2+bt+c=0$ ritornando poi a x.

Es. $x^6-28x^3+27=0$ $\quad x^3=t \quad t^2-28t+27=0$

$\frac{\Delta}{4}=14^2-27=169$

$t_{1/2}=14\pm13=\left\langle\begin{matrix}1\\27\end{matrix}\right.$

$x^3=1 \Rightarrow x=1$, $\quad x^3=27 \Rightarrow x=3$.

- $x^4-x^4-2=0$ $\quad x^4=t \quad t^2-t-2=0 \quad \Delta=9$

$t_{1/2}=\frac{1\pm3}{2}=\left\langle\begin{matrix}-1\\2\end{matrix}\right.$ $\quad x^4=-1$ ∄ sol $\quad x^4=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{2}$.

Caso generale:

- $x^5-16x=0$ $\quad x(x^4-4)=0 \Rightarrow x=0 \vee x^4=4$ cioè $x=\pm\sqrt{2}$.
- $2x^4-7x^3+x^2+7x-3=0$ Si vede facilmente che $+1$ e -1 sono radici dell'equazione. Divido con metodo di Ruffini per $x-1$ e poi per $x+1$

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 2 & -7 & 1 & 7 & -3 \\
1 & & 2 & -5 & -4 & +3 \\
\hline
 & 2 & -5 & -4 & 3 & // \\
-1 & & -2 & 7 & -3 & \\
\hline
 & 2 & -7 & +3 & // &
\end{array}$$

$2x^4-7x^3+x^2+7x+3=$

$(x-1)(x+1)(x^2-7x+3)=0$

che ha soluzioni $x=1$, $x=-1$, $x^2-7x+3=0$

cioè $x_{1/2}=\frac{7\pm\sqrt{37}}{2}$.

L'equazione ha 4 radici reali $+1, -1, \frac{7+\sqrt{37}}{2}$ e $\frac{7-\sqrt{37}}{2}$.

Se anziché equazioni si studiano disequazioni di ordine superiore si procede come nel caso delle equazioni applicando poi, se necessario, la regola del segno di un prodotto.

Es. $x^8-9x^4+8\geq0$ $\quad$ Posto $x^4=t$ si trova

$t^2-9t+8\geq0 \quad \Delta=81-32=49 \quad t_{1/2}=\frac{9\pm7}{2}=\left\langle\begin{matrix}1\\8\end{matrix}\right.$

$t\leq1 \vee t\geq8$ $\quad$ Tornando a x si ha:

$x^4 \le 1 \vee x^4 \ge 8 \iff x \le -1 \vee x \ge 1 \vee x \le -\sqrt[4]{8} \vee x \ge \sqrt[4]{8}$

- $9x^4 - 19x^2 + 2 \le 0$ $\quad x^2 = t \to 9t^2 - 19t + 2 \le 0$

$\Delta = 381 - 72 = 309$ $\quad t_{1,2} = \dfrac{19 \pm \sqrt{309}}{18}$ $\quad \dfrac{19-\sqrt{309}}{18} \le t \le \dfrac{19+\sqrt{309}}{18}$

$\Rightarrow \dfrac{19-\sqrt{309}}{18} \le x^4 \le \dfrac{19+\sqrt{309}}{18} \iff$

$-\sqrt[4]{\dfrac{19+\sqrt{309}}{18}} \le x \le -\sqrt[4]{\dfrac{19-\sqrt{309}}{18}} \vee \sqrt{\dfrac{19-\sqrt{309}}{18}} \le x \le \sqrt{\dfrac{19+\sqrt{309}}{18}}$

- $\dfrac{x^6 - 28x^3 + 27}{x^2 - 1} < 0$ $\quad$ Applico la regola del segno

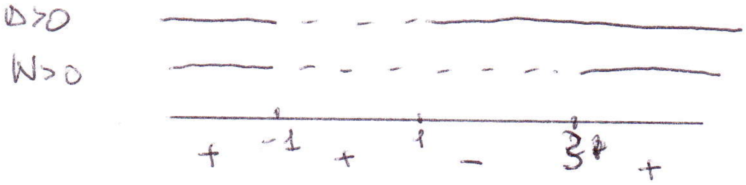
$N > 0 \quad x^6 - 28x^3 + 27 > 0 \quad x^3 = t \quad t^2 - 28t + 27 > 0 \quad t_{1,2} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 27 \end{matrix} \right.$

$t < 1 \vee t > 27 \iff x^3 < 1 \vee x > 27 \iff$

$x < 1 \vee x > 3$

$D > 0 \quad x^2 - 1 > 0 \quad x < -1 \vee x > 1$

$S =]1, 3[$



- $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x + 7} > 0$

Per non applicare due volte la regola del segno, una per studiare il segno del numeratore e una per il segno del quoziente basta osservare che studiare il segno del quoziente è lo stesso che studiare il segno del prodotto di due quantità (bisogna stare solo attenti all' $= 0$!)

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} \mathop{>}\limits_{<} 0 \iff P(x)Q(x) \mathop{>}\limits_{<} 0$

$\dfrac{P(x)}{Q(x)} \mathop{\ge}\limits_{\le} 0 \iff \begin{cases} P(x)Q(x) \mathop{\ge}\limits_{\le} 0 \\ Q(x) \ne 0 \end{cases}$

- $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - x + 7} > 0 \iff (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(x^2 - x + 7) > 0$

$(x+1)^3 \underbrace{(x^2 - x + 7)}_{\substack{+ \\ \Delta < 0}} > 0 \iff x > -1$

$$\frac{x^4+2x^3-7x^2-8x+12}{x^3-x^2}\le 0 \iff \begin{cases}(x^4+2x^3-7x^2-8x+12)(x^3-x^2)\le 0\\ x^3-x^2\neq 0\end{cases}$$

Si vede subito che $x=1$, $x=2$ sono radici del polinomio $x^4+2x^3-7x^2-8x+12$. Dividendo per $x-1$ e per $x-2$ si trova

$$x^4+2x^3-7x^2-8x+12=(x-1)(x-2)(x^2+x-6)$$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & -7 & -8 & 12\\ 1 & & 1 & 3 & -4 & -12\\ \hline & 1 & 3 & -4 & -12 & //\\ -2 & & -2 & -2 & 12 & \\ \hline & 1 & 1 & -6 & // & \end{array}$$

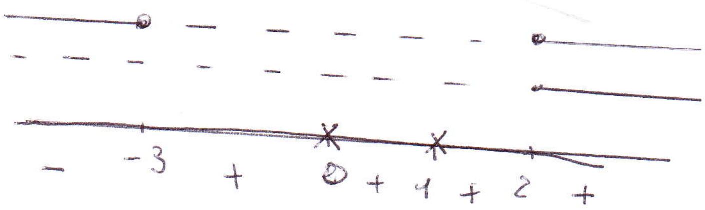
Quindi, poiché $x^3-x^2=x(x-1)$ la disequazione diventa

$$\begin{cases}(x-1)^2(x-2)x^2(x^2+x-6)\le 0\\ x^2(x-1)\neq 0\end{cases} \iff \begin{cases}(x-2)(x^2+x-6)\le 0\\ x\neq 0,\ x\neq 1\end{cases}$$

$x\ge 2$

$x^2+x-6\ge 0 \qquad x_{1/2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\left\langle\begin{matrix}-3\\ 2\end{matrix}\right.$

$x\le -3 \vee x\ge 2$



$S=(-\infty,-3]$

$$\frac{(x^2-4)(x-1)}{x^2-x-2}\ge 0 \iff \begin{cases}(x^2-4)(x-1)(x^2-x-2)\ge 0\\ x^2-x-2\neq 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}(x-2)(x+2)(x-1)(x+1)(x-2)\ge 0\\ x\neq -1,\ x\neq 2\end{cases} \iff$$

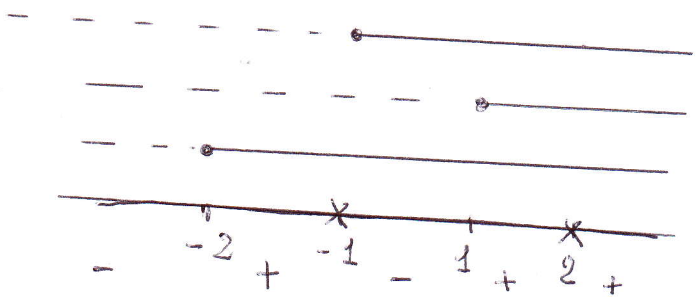
$$\begin{cases}(x-2)^2(x+2)(x-1)(x+1)\ge 0\\ x\neq -1, 2\end{cases}$$

$(x-2)^2\ge 0$

$x+2\ge 0 \iff x\ge -2$

$x-1\ge 0 \iff x\ge 1$

$x+1\ge 0 \iff x\ge -1$



$S=[-2,-1[\ \cup\ [1,2[\ \cup\ ]2,+\infty)$

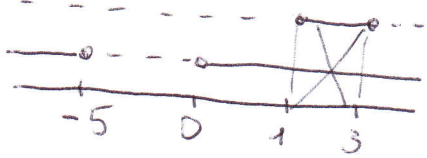
Sistemi di disequazioni

Si studiano separatamente le varie disequazioni del sistema e poi si cercano le soluzioni comuni.

$$\begin{cases} x^2+5x \geq 0 \\ x^2-4x+3 \leq 0 \end{cases}$$

$x \leq -5 \quad \vee \quad x \geq 0$

$x_{1/2} = \dfrac{2 \pm 1}{1} = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right. \qquad 1 \leq x \leq 3$



$S = [1, 3]$

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2-x-10}{x^3-3x+2} \leq \dfrac{3x+1}{x^2-2x+1} \\ \dfrac{x}{x+3} - \dfrac{1}{4} < \dfrac{x-1}{2x} \end{cases}$$

Poiché $x^3-3x+2 = (x-1)^2(x+2)$

$x^2-2x+1 = (x-1)^2$

il sistema diventa

$$\begin{cases} \dfrac{2x^2-x-10-(3x+1)(x+2)}{(x-1)^2(x+2)} \leq 0 \\ \dfrac{4x-x-3-2x+2}{4x(x+3)} < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{-x^2-4x-12}{(x-1)^2(x+2)} \leq 0 \\ \dfrac{x-1}{x(x+3)} < 0 \end{cases}$$

$$\frac{-x^2-4x-12}{(x-1)^2(x+2)} \leq 0 \iff \begin{cases} (x^2+4x+12)(x-1)^2(x+2) \geq 0 \\ x \neq 1, -2 \end{cases}$$

$x^2+4x+10 \geq 0 \qquad \forall x \qquad (\Delta < 0)$

$(x-1)^2 \geq 0 \qquad \forall x$

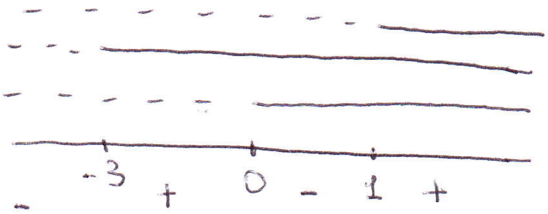
$x+2 \geq 0 \qquad \forall x \geq -2$

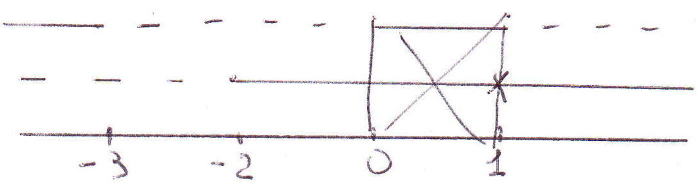
La disequazione è verificata $\forall x > -2, x \neq 1$

$$\frac{x-1}{x(x+3)} < 0 \iff x(x+3)(x-1) < 0$$

$x > 0 \qquad x > -3 \qquad x > 1$

La disequazione è soddisfatta per $x < -3 \ \vee \ 0 < x < 1$





$S =]0, 1[$

Valore assoluto: definizione e proprietà

$\forall x \in \mathbb{R}: \quad |x| \overset{def}{=} \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Proprietà del valore assoluto

1) $\forall x \in \mathbb{R}: \quad |x| \geq 0$

2) $|x| = 0 \iff x = 0$

3) $|x \cdot y| = |x||y|$

4) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (disuguaglianza triangolare)

5) $|x| \leq a \iff \begin{cases} \emptyset & a < 0 \\ -a \leq x \leq a & a \geq 0 \end{cases}$ $\qquad |x| < a \iff \begin{cases} \emptyset & a \leq 0 \\ -a < x < a & a > 0 \end{cases}$

6) $|x| \geq a \iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & a \leq 0 \\ x \leq -a \vee x \geq a & a > 0 \end{cases}$ $\qquad |x| > a \iff \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} & a < 0 \\ x < -a \vee x > a & a \geq 0 \end{cases}$

Equazioni e disequazioni con il valore assoluto

- $|x+1| = -3 \qquad \emptyset$

- $|x+1| = 3 \iff x+1 = 3 \vee x+1 = -3 \iff x = 2 \vee x = -4$

- $|x^2 - x| = 2x \iff \begin{cases} x^2 - x \geq 0 \\ x^2 - x = 2x \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - x < 0 \\ -x^2 + x = 2x \end{cases}$

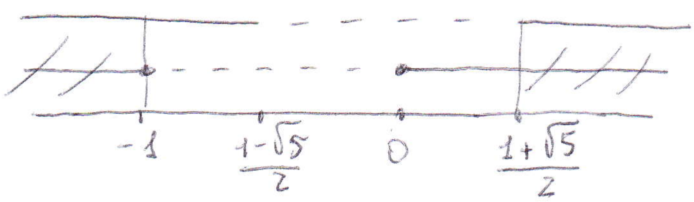
$\iff \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x \leq 0 \cup x \geq 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 + x = 0 \end{cases}$ $\qquad$ L'eq. ha soluzioni $x = 0 \vee x = 3$

$\underset{acc.}{x = 0} \vee \underset{acc.}{x = 3} \qquad \underset{non\ acc.}{x = 0} \vee \underset{non\ acc}{x = -1}$

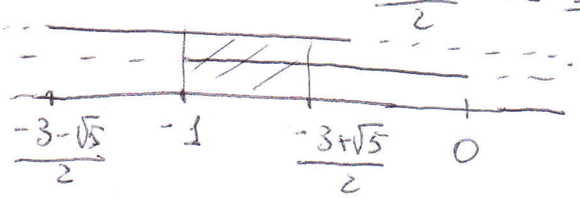
- $2x + 1 < |x^2 + x| \iff \begin{cases} x^2 + x \geq 0 \\ 2x + 1 < x^2 + x \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 + x < 0 \\ 2x + 1 < -x^2 - x \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 0 \\ x^2 - x - 1 > 0 \quad x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} -1 < x < 0 \\ x^2 + 3x + 1 < 0 \end{cases}$

$-\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$



$\cup$



$S = (-\infty, -1] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) \cup \left]-1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right[= \left(-\infty, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$

• $|2x^2-1|-|x^2+1|<x+2 \iff |2x^2-1|-x^2-1<x+2$ (perché $x^2+1>0\ \forall x$)

$\iff |2x^2-1|<x^2+x+3 \iff 2x^2-1<-x^2-x-3 \vee 2x^2-1>x^2+x+3$

poiché $x^2+x+3>0\ \forall x$

$\iff 3x^2+x+2<0 \vee x^2-x-4>0 \iff x<\frac{1-\sqrt{17}}{2} \vee x>\frac{1+\sqrt{17}}{2}$.

$\Delta<0$ $\emptyset$

• $\frac{x^2+|x-2|}{x^2-|x+1|}>1 \iff \frac{\cancel{x^2}+|x+2|-\cancel{x^2}+|x+1|}{x^2-|x+1|}>0 \iff$ il numeratore è sempre >0 essendo somma di 2 valori assoluti che non si annullano contemporaneamente

$x^2-|x+1|>0 \iff |x+1|<x^2$

$\iff -x^2<x+1<x^2$

$\iff x^2+x+1>0 \wedge x^2-x-1>0 \iff x<\frac{1-\sqrt{5}}{2} \vee x>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

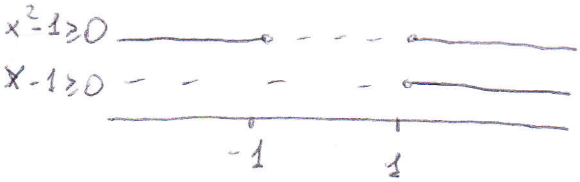
$\Delta<0$ $\forall x\in\mathbb{R}$

• $\frac{x^2}{|x-1|}+2x>|x+1| \iff \frac{x^2+2x|x-1|-|x^2-1|}{|x-1|}>0 \iff$

$\begin{cases} x^2+2x|x-1|-|x^2-1|>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$ tolgo il denominatore perché è sempre positivo

Studio: $x-1\geq 0$ $\quad x\geq 1$

$x^2-1\geq 0$ $\quad x\leq -1 \vee x\geq 1$

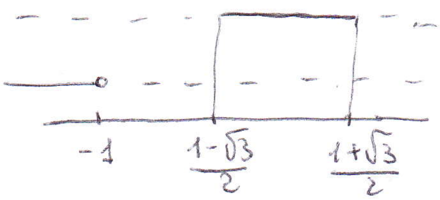


Segue che

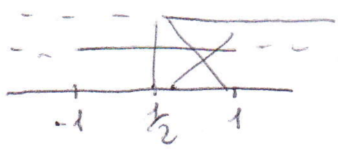
$\begin{cases} x^2+2x|x-1|-|x^2-1|>0 \\ x\neq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x\leq -1 \\ \cancel{x^2}-2x(x-1)-(\cancel{x^2}-1)>0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1<x<1 \\ \cancel{x^2}-2x(x-1)+x^2-1>0 \end{cases} \vee$

$\begin{cases} x>1 \\ \cancel{x^2}+2x(x-1)-(\cancel{x^2}-1)>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\leq -1 \\ 2x^2-2x-1<0 \end{cases} \vee \begin{cases} -1<x<1 \\ 2x-1>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x>1 \\ 2x^2-2x+1>0 \end{cases}$

$\frac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ $\quad x>\frac{1}{2}$ $\quad \Delta<0\ \forall x$



$\vee$



$\vee$ $x>1$

$\emptyset$

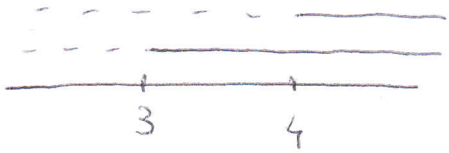
$\frac{1}{2}<x<1 \vee x>1$ $\qquad S=]\frac{1}{2},1[\cup]1,+\infty)$.

- $\dfrac{x+1}{|x-4|+1} - \dfrac{x-1}{|x-3|} > 1 \iff \begin{cases} x \neq 3 \\ (x+1)|x-3| - (x-1)(|x-4|+1) > |x-3|(|x-4|+1) \end{cases}$

Tolgo il denominatore perché sempre ≥ 0

$x-3>0 \quad x>3$

$x-4>0 \quad x>4$



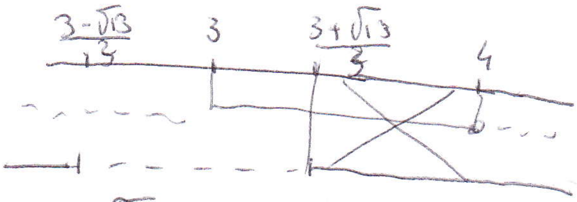
$\iff \begin{cases} x<3 \\ (x+1)(-x+3)-(x-1)(-x+4+1) > (-x+3)(-x+4+1) \end{cases} \vee \begin{cases} 3<x\leq 4 \\ (x+1)(x-3)-(x-1)(-x+5) > (x-3)(-x+5) \end{cases}$

$\vee \begin{cases} x>4 \\ (x+1)(x-3)-(x-1)(x-3) > (x-3)(x-3) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x<3 \\ -x^2-x+3x+3-(\cancel{x}-1+\cancel{x}+3)(-x+5)>0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3<x\leq 4 \\ (x-3)(\cancel{x}+1+\cancel{x}-5)+(x-5)(x-1)>0 \end{cases}$

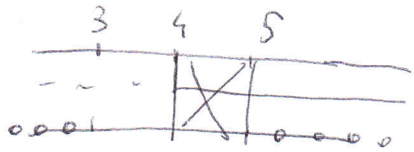
$\vee \begin{cases} x>4 \\ (x-3)(\cancel{x}+1-\cancel{x}+1-x+3)>0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x<3 \\ x^2-4x+7<0 \end{cases}$ $\Delta<0 \quad \emptyset$ $\vee \begin{cases} 3<x\leq 4 \\ 3x^2-16x+17>0 \end{cases}$ $x<\dfrac{3-\sqrt{13}}{3} \vee x>\dfrac{3+\sqrt{13}}{3}$ $\vee \begin{cases} x>4 \\ (x-3)(-x+5)>0 \end{cases}$ $3<x<5$



$\dfrac{3-\sqrt{13}}{3} < x \leq 4$

$\vee$



$4<x<5$

$$S = \left]\frac{3-\sqrt{13}}{3}, 4\right] \cup \left]4, +\infty\right) = \left]\frac{3-\sqrt{13}}{3}, +\infty\right)$$

- $|x^2-2x| \geq x^2 \iff x^2-2x \leq -x^2 \vee \cancel{x^2}-2x \geq \cancel{x^2}$ (N.B. $x^2 \geq 0 \ \forall x$)

$\iff \cancel{2}x^2-\cancel{2}x \leq 0 \vee \cancel{2}x \leq 0 \iff 0\leq x\leq 1 \vee x \leq 1$

$\iff x \leq 1 \qquad S=(-\infty, 1].$

Disequazioni irrazionali

Una disequazione si dice irrazionale se l'incognita compare sotto il segno di radice.

Consideriamo disequazioni del tipo $\sqrt[n]{P(x)} < Q(x)$ ($\leq$, $>$, $\geq$) P, Q polinomi.

Se n è dispari, per eliminare la radice basta elevare alle potenze n-esima cioè

$$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x) \overset{n \text{ dispari}}{\iff} P(x) < [Q(x)]^n$$
($\leq$, $>$, $\geq$)

Se invece n è pari, bisogna porre il radicando ≥ 0 perché abbia senso la radice e poi, prima di elevare alla potenza n-esima, verificare che le basi siano entrambe positive in quanto $0 \leq a \leq b \iff a^n \leq b^n$! Segue che

$$\sqrt[n]{P(x)} < Q(x) \ (\leq) \overset{n \text{ pari}}{\iff} \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) < [Q(x)]^n \ (\leq) \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{P(x)} > Q(x) \ (\geq) \overset{n \text{ pari}}{\iff} \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} \cancel{P(x) \geq 0} \\ Q(x) \geq 0 \\ P(x) > [Q(x)]^n \ (\geq) \end{cases}$$

$\to$ superflua perché segue dalla 3ª

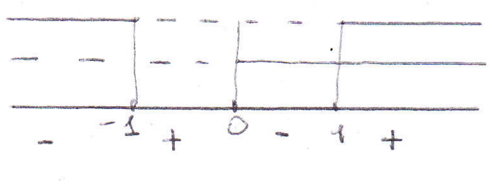
Se invece nella disequazione compaiono più radici con indice pari bisogna porre i rispettivi radicandi ed elevare al quadrato più volte dopo essersi assicurati che le basi siano positive.

Esercizi

$$\sqrt[3]{1+x^3} < x+1 \iff \cancel{1}+x^3 < x+\cancel{1} \iff x(x^2-1) < 0$$

$x > 0$

$x^2 - 1 > 0 \qquad x < -1 \vee x > 1$



S: $x < -1 \vee 0 < x < 1$

- $2x < \sqrt{x^2-5x} \iff \begin{cases} x^2-5x \ge 0 \\ 2x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x \ge 0 \\ 4x^2 < x^2-5x \end{cases} \iff$

$\begin{cases} x \le 0 \vee x \ge 5 \\ x < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge 0 \\ -\frac{5}{3} < x < 0 \end{cases} \iff x < 0 \vee x \in \emptyset$

$S = (-\infty, 0[.$

- $\sqrt{x^2-15x+50} - 5 > x \iff \sqrt{x^2-15x+50} > 5+x \iff$

$\begin{cases} x^2-15x+50 \ge 0 \\ x+5 < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x+5 \ge 0 \\ x^2-15x+50 > (x+5)^2 \end{cases} \iff$

$\Delta = 225-200 = 25 \quad x_{1,2} = \frac{15 \pm 5}{2} = \begin{cases} 5 \\ 10 \end{cases}$

$\begin{cases} x \le 5 \vee x \ge 10 \\ x < -5 \end{cases} \vee \begin{cases} x \ge -5 \\ \cancel{25}x < \cancel{25}_{1} \end{cases} \iff x < -5 \vee -5 \le x < 1$

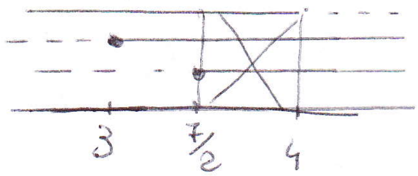
$S: x < 1$

- $\sqrt{x^4-x^2} + x^2+1 \ge 0 \iff x^4-x^2 \ge 0$ (non serve imporre altro perché la radice, quando ha senso, è sempre ≥ 0 e $x^2+1 > 0 \ \forall x$)

$\iff x^2(x^2-1) \ge 0 \iff x \le -1 \vee x \ge 1$

- $\sqrt{2x-7} - \sqrt{x-3} < 0 \iff \sqrt{2x-7} < \sqrt{x-3} \iff$

$\begin{cases} 2x-7 \ge 0 \\ x-3 \ge 0 \\ 2x-7 < x-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x \ge \frac{7}{2} \\ x \ge 3 \\ x < 4 \end{cases}$



$\frac{7}{2} \le x < 4$

- $\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2-1}} < 1 \iff \begin{cases} \frac{1+x^2}{x^2-1} \ge 0 \\ \frac{1+x^2}{x^2-1} < 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-1 > 0 \\ \frac{1+\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x^2-1} < 0 \end{cases}$ (osservo che $x^2+1 > 0 \ \forall x$)

$\iff \begin{cases} x^2-1 > 0 \\ x^2-1 < 0 \end{cases}$ impossibile! $S: \emptyset$

- $\sqrt{\frac{1-x}{2+x}} \ge 0 \iff \frac{1-x}{2+x} \ge 0 \iff -2 < x \le 1$

- $\sqrt{\frac{x-3}{x-2}} + 1 > 0 \iff \frac{x-3}{x-2} \ge 0 \iff x < 2 \vee x \ge 3$ (la radice, se ha senso, è sempre ≥ 0 e sommata a $+1$ si ha sempre un numero > 0)

- $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}\geq 3 \iff \begin{cases} x+1\geq 0\\ x-2\geq 0\\ x+1+x-2+2\sqrt{(x+1)(x-2)}\geq 9\end{cases}$

una volta imposto i radicandi positivi, posso elevare al quadrato essendo 1° e 2° membro positivi

$\iff \begin{cases} x\geq -1\\ x\geq 2\\ 2\sqrt{x^2-x-2}\geq 10-2x\end{cases} \iff \begin{cases} x\geq 2\\ 10-2x<0\end{cases} \vee \begin{cases} x\geq 2\\ 10-2x\geq 0\\ 4(\cancel{x^2}-x-2)\geq 100+\cancel{4x^2}-40x\end{cases}$

$\iff \begin{cases} x\geq 2\\ x>5\end{cases} \vee \begin{cases} x\geq 2\\ x\leq 5\\ \cancel{36}_{1}x\geq \cancel{108}_{3}\end{cases} \iff x>5 \vee 3\leq x\leq 5 \iff x\geq 3$

$S:\ x\geq 3$

- $\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}>0 \iff \begin{cases} x+1>0\\ x^2-1>0\end{cases}$ (basta osservare che il denominatore, quando definito, è sempre >0)

$\iff \begin{cases} x>-1\\ x<-1 \vee x>1\end{cases} \iff x>1$

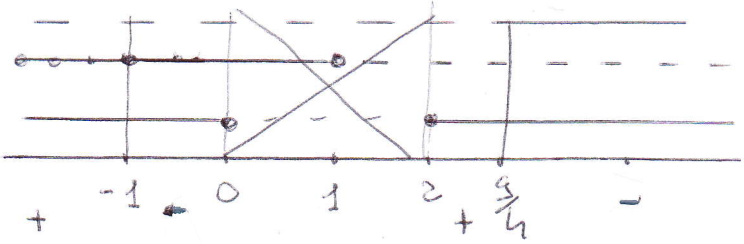
- $\dfrac{1-x^2}{x+\sqrt{x^2-2x}-3}\leq 0$ Applico la regola del segno quando la frazione è definita, cioè per $x^2-2x\geq 0 \iff x\leq 0 \vee x\geq 2$

$\iff$ $N\geq 0$ $\quad 1-x^2\geq 0 \quad -1\leq x\leq 1$

$D>0 \quad \sqrt{x^2-2x}>3-x \iff \begin{cases} x^2-2x\geq 0\\ 3-x<0\end{cases} \vee \begin{cases} 3-x\geq 0\\ \cancel{x^2}-2x>9+\cancel{x^2}-6x\end{cases}$

$\iff \begin{cases} x\leq 0 \vee x\geq 2\\ x>3\end{cases} \vee \begin{cases} x\leq 3\\ x>\frac{9}{4}\end{cases} \iff x>3 \vee \frac{9}{4}<x\leq 3$

$\iff x>\frac{9}{4}$



$-1\leq x\leq 0 \vee x>\frac{9}{4}$

- $\sqrt{5+4x}<|3+2x| \iff \begin{cases} 5+4x\geq 0\\ |3+2x|\geq 0\\ 5+4x<(3+2x)^2\end{cases} \iff \begin{cases} x\geq -\frac{5}{4}\\ \forall x\\ \cancel{4}x^2+\cancel{8}_{2}x+\cancel{4}>0\end{cases}$

$$\begin{cases} x \geq -\frac{5}{4} \\ (x+1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{4} \\ x \neq -1 \end{cases} \qquad S = [-\tfrac{5}{4}, -1[\cup]-1, +\infty).$$

- $$\sqrt{4+|1-x^2|} < x + \sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+|1-x^2| \geq 0 & \forall x \\ x+\sqrt{5} \geq 0 & x \geq -\sqrt{5} \\ 4+|1-x^2| < x^2+5+2\sqrt{5}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\sqrt{5} \\ 1-x^2 \geq 0 \\ \cancel{4}+\cancel{1}-x^2 < x^2+\cancel{5}+2\sqrt{5}x \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -\sqrt{5} \\ 1-x^2 < 0 \\ 4-1+\cancel{x^2} < \cancel{x^2}+5+2\sqrt{5}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq -\sqrt{5} \\ -1 \leq x \leq 1 \\ \cancel{2}x^2+\cancel{2}\sqrt{5}x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -\sqrt{5} \\ x < -1 \vee x > 1 \\ 2\sqrt{5}x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq -\sqrt{5} \\ -1 \leq x \leq 1 \\ x < -\sqrt{5} \vee x > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq -\sqrt{5} \\ x < -1 \vee x > 1 \\ x > -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 1 \vee x > 1$$

$S:\ x > 0$

- $$\sqrt{5+4x} < 3+|2x| \Leftrightarrow \begin{cases} 5+4x \geq 0 \\ 3+|2x| \geq 0 \\ 5+4x < 9+4x^2+12|x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{4} \\ \forall x \\ 4x^2+12|x|-4x+4>0 \end{cases}$$

Poiché:

$$4x^2+12|x|-4x+4>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \cancel{4}x^2+\cancel{8}x+\cancel{4}>0 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ \cancel{4}x^2-\cancel{16}x+\cancel{4}>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ (x+1)^2 > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x<0 \\ x^2-4x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x < 2-\sqrt{2} \vee x > 2+\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \vee x < 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

il sistema di partenza diventa $\begin{cases} x \geq -\frac{5}{4} \\ \forall x \\ \forall x \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{4}$

$S = [-\frac{5}{4}, +\infty)$

Esponenziali e logaritmi

Si vuole dare un significato al simbolo a^x $\forall x \in \mathbb{R}$.

Se $x \in \mathbb{N}$, $x = n$, $a^n \overset{def}{=} \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ volte}}$, $a^0 \overset{def}{=} 1$ con $a \in \mathbb{R}$

Se $x \in -\mathbb{N}$, $x = -n$, $a^{-n} \overset{def}{=} \frac{1}{a^n}$ con $a \in \mathbb{R}^*$

Se $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{n}{m}$, $a^{\frac{n}{m}} \overset{def}{=} \sqrt[m]{a^n}$ con $a > 0$ (se $a < 0$ $a^{\frac{n}{m}}$ non avrebbe senso se n dispari e m pari)

Se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si definisce a^x il valore a cui tendono le potenze $(a > 0)$ di a con esponenti razionali che approssimano x

Esempio: per definire $3^{\sqrt{2}}$ si approssima $\sqrt{2}$ con i razionali

$1 \quad 1,4 \quad 1,41 \quad 1,414 \quad \ldots$

e quindi si calcolano le rispettive potenze

$3^1 \quad 3^{1,4} \quad 3^{1,41} \quad 3^{1,414} \quad \ldots$ che "tendono" a $3^{\sqrt{2}}$.

Proprietà delle potenze con esponente reale

1) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad \forall a > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

2) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad \forall a > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

3) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ $\quad \forall a > 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

4) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ $\quad \forall a, b > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ $\quad \forall a, b > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

6) $x < y \Rightarrow$ $a^x < a^y$ se $a > 1$; $a^x > a^y$ se $0 < a < 1$

(se la base è > 1 la potenza cresce al crescere dell'esponente, se invece la base è compresa tra 0 e 1 la potenza decresce al crescere dell'esponente).

Def. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a, b > 0 \quad a \neq 1$

$\lg_a b = x \iff a^x = b$ (il logaritmo di un numero positivo b in una data base a, con $a>0$, $a \neq 1$, è l'esponente che bisogna dare alla base per avere il numero)

Es. $\lg_3 \frac{1}{9} = -2$ perché $3^{-2} = \frac{1}{9}$ $\qquad \lg_5 25 = 2$ perché $5^2 = 25$

$\lg_{10} 1000 = 3$ perché $10^3 = 1000$ $\qquad \lg_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4$ perché $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{27}$

$\lg_2 \sqrt[4]{\frac{1}{8}} = -\frac{3}{4}$ perché $2^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{8}}$

N.B. $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},\ a > 0$

$\lg_a b \in \mathbb{R}$ più precisamente $\lg_a b > 0$ se $a > 1 \wedge b > 1$ oppure $0 < {a \atop b} < 1$

mentre $\lg_a b < 0$ se $a > 1 \wedge 0 < b < 1$ o viceversa $0 < a < 1 \wedge b > 1$

Proprietà dei logaritmi

1) $a^{\lg_a b} = b \qquad \forall a, b > 0,\ a \neq 1$

2) $\lg_a a^b = b \qquad \forall a > 0,\ a \neq 1,\ \forall b \in \mathbb{R}$

3) $\lg_a 1 = 0$

4) $\lg_a a = 1$

Inoltre

- $\lg_a (x \cdot y) = \lg_a x + \lg_a y \qquad \forall x, y > 0 \quad \forall a > 0\ a \neq 1$
- $\lg_a \frac{x}{y} = \lg_a x - \lg_a y \qquad \forall x, y > 0 \quad \forall a > 0\ a \neq 1$
- $\lg_a x^k = k \lg_a x \qquad \forall x > 0 \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad \forall a > 0\ a \neq 1$
- $\lg_a x = \frac{\lg_b x}{\lg_b a}$ (formule del cambiamento di base) $\qquad \forall {a \atop b} > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1 \quad \forall x > 0$

Disequazioni esponenziali di tipo elementare

se $b>0$

$$a^x > b \iff \begin{cases} x > \log_a b & \text{se } a>1 \\ x < \log_a b & \text{se } 0<a<1 \end{cases}$$

Se invece $b \leq 0$: $a^x > b$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Basta riscrivere la disequazione nella forma $a^x > a^{\log_a b}$ e osservare che se $a>1$ (risp $0<a<1$) la potenza cresce (risp. decresce) al crescere dell'esponente.

Esercizi su disequazioni esponenziali

- $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \frac{27}{8} \iff \left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^3 \iff \left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \iff x > -3.$

- $2^{x-1} > 2 \iff x-1>1 \iff x>2.$

- $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-3x} > \frac{16}{9} \iff \left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-3x} > \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \iff x^2-3x < -2$

$$\iff x^2-3x+2<0 \iff 1<x<2.$$

- $\left(\frac{1}{4}\right)^{5-3x} < 1 \iff \left(\frac{1}{4}\right)^{5-3x} < \left(\frac{1}{4}\right)^0 \iff 5-3x>0 \iff x<\frac{5}{3}.$

- $8^{x^2+2x} > \frac{1}{8} \iff 8^{x^2+2x} > 8^{-1} \iff x^2+2x>-1 \iff x^2+2x+1>0$

$$\iff x \neq -1.$$

- $2^{x-3} \cdot 4^{x+1} < 4 \iff 2^{-3} \cdot 2^x \cdot 2^{2(x+1)} < 4 \iff \frac{1}{\cancel{8}_2} \cdot 2^x \cdot \cancel{2^2} \cdot 2^{2x} < 4$

$$\iff 2^{3x} < 8 \iff 2^{3x} < 2^3 \iff 3x<3 \iff x<1.$$

- $2^x(4^x-1)<0 \iff 4^x-1<0$ (poiché $2^x>0$ $\forall x$)

$$\iff 4^x < 4^0 \iff x<0.$$

- $4^x-2^x-2>0 \iff 2^{2x}-2^x-2>0$ Posto $2^x=y$ si ha

$y^2-y-2>0 \iff y<-1 \lor y>2$ Ritornando a 2^x si ha

$\underbrace{2^x<-1}_{\emptyset} \lor \underbrace{2^x>2}_{x>1} \iff x>1.$

- $2(3^x-2)^2-3(3^x-2)+1<0$ Posto $y=3^x-2$ si ha

$2y^2-3y+1<0 \iff \frac{1}{2}<y<1$ Ritornando nella sostituzione si ha

$\frac{1}{2}<3^x-2<1 \iff \frac{5}{2}<3^x<3 \iff \log_3\frac{5}{2}<x<1$.

- $\dfrac{2^x(3\cdot 2^x-5)+2}{1-3^x}>0$ Applico la regola del segno

N>0 $3\cdot 2^{2x}-5\cdot 2^x+2>0$ $2^x=y$ $3y^2-5y+2>0$

$y<2/3 \vee y>1 \iff 2^x<2/3 \vee 2^x>1 \iff x<\log_2 2/3 \vee x>0$.

D>0 $1-3^x>0 \iff 3^x<1 \iff x<0$

S: $x<\log_2 2/3$

- $\dfrac{|2^{x-1}-2|-6}{3^x}\geq 0 \iff |2^{x-1}-2|>6$ (Tolgo il denominatore perché è sempre >0)

$\iff 2^{x-1}-2<-6 \vee 2^{x-1}-2>6 \iff 2^{x-1}<-4 \vee 2^{x-1}>8=2^3$

$\iff \emptyset \vee x-1>3$ $x>4$

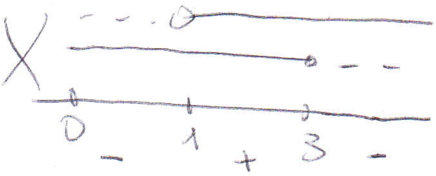
- $\dfrac{3^x+1}{3^x-1}-\dfrac{3^x}{3^x+1}\geq\dfrac{5}{4}$ Posto $3^x=y$: $\dfrac{y+1}{y-1}-\dfrac{y}{y+1}\geq\dfrac{5}{4} \iff$

$\dfrac{4(y+1)^2-4y(y-1)-5(y^2-1)}{4(y-1)(y+1)}\geq 0$ Applico regole del segno ricordando che $y>0$:

N≥0 $\cancel{4y^2}+8y+4-\cancel{4y^2}+4y-5y^2+5\geq 0 \iff 5y^2-12y-9\leq 0$

$-\frac{3}{5}\leq y\leq 3 \iff 0<y\leq 3$

D>0 $\cancel{4}(y-1)(\cancel{y+1})>0 \iff y-1>0 \iff y>1$



$1<y\leq 3$ Tornando a 3^x si ha

$1<3^x\leq 3 \iff 0<x\leq 1$.

• $\dfrac{5^{\sqrt{x}+1} - 5^{\sqrt{x}-1}}{25^{\sqrt{x}}+1} < \dfrac{12}{5}$ Ricordo che la disequazione è definita per $x \geq 0$.

Posto $5^{\sqrt{x}} = y$ si ha $\dfrac{5y - \frac{1}{5}y}{y^2+1} < \dfrac{12}{5} \iff$

$\dfrac{\cancel{5}\cdot\frac{24}{\cancel{5}}y - 12(y^2+1)}{5(y^2+1)} < 0 \iff \dfrac{\cancel{12}\,(2y-y^2-1)}{5\cancel{(y^2+1)}} < 0 \iff$

$2y - y^2 - 1 < 0$ (il denominatore è sempre >0) $\iff$

$y^2 - 2y + 1 > 0 \iff y \neq 1$ Tornando nella sostituzione:

$5^{\sqrt{x}} \neq 1 \iff \sqrt{x} \neq 0 \iff \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \iff x > 0.$

• $3^x(2-3^x) < 1 \iff 2\cdot 3^x - 3^{2x} < 1 \iff 3^{2x} - 2\cdot 3^x + 1 > 0$

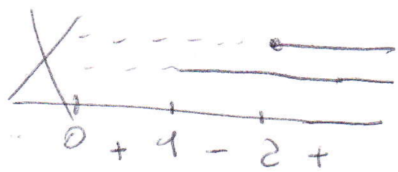
$\iff (3^x-1)^2 > 0 \iff 3^x \neq 1 \iff x \neq 0.$

• $\dfrac{2^x+1}{2^x} - \dfrac{2^x}{2^x-1} \geq -\dfrac{1}{2}$ Posto $2^x = y$ si ha

$\dfrac{y+1}{y} - \dfrac{y}{y-1} \geq -\dfrac{1}{2} \iff \dfrac{2(\cancel{y^2}-1) - \cancel{2y^2} + y^2 - y}{2y(y-1)} \geq 0 \iff$

$\dfrac{y^2 - y - 2}{\cancel{2y}(y-1)} \geq 0 \iff \dfrac{y^2-y-2}{y-1} \geq 0$ Voglio $y > 0$ (per come è definita)

$N > 0$ $y^2 - y - 2 > 0 \iff \underset{\emptyset}{y \leq -1} \vee y \geq 2$



$D > 0$ $y > 1$

$0 < y < 1 \vee y \geq 2.$

Ritorno a 2^x: $0 < 2^x < 1 \vee 2^x \geq 2 \iff$

$x < 0 \vee x \geq 1.$

Disequazioni logaritmiche di tipo elementare

$$\forall b \in \mathbb{R}: \quad \lg_a x > b \iff \begin{array}{ll} x > a^b & \text{se } a>1 \\ 0<x<a^b & \text{se } 0<a<1 \end{array}$$

Basta riscrivere la disequazione nella forma $\lg_a x > \lg_a a^b$ e osservare che se $a>1$ (risp. $0<a<1$) il logaritmo cresce al crescere dell'argomento.

Esercizi

- $\lg_2 (x-2) \leq 0 \iff 0 < x-2 \leq 1 \iff 2 < x \leq 3$
- $\lg_3 (4x-1) > 0 \iff 4x-1>1 \iff 4x>2 \iff x>\frac{1}{2}$
- $\lg_{\frac{1}{2}} (2x-5) \not\leq 0 \iff 2x-5>1 \iff 2x>6 \iff x>3$
- $\lg_{3/4} (1-x^2) \leq 0 \iff 1-x^2 \geq 1 \iff x^2 \leq 0 \iff x=0$
- $\lg_a (5-x^2) > 0$ con $0<a<1$ $\iff 0<5-x^2<1 \iff -5<-x^2<-4$

  $\iff 4<x^2<5 \iff -\sqrt{5}<x<-2 \vee 2<x<\sqrt{5}$.
- $\lg_a (x-\sqrt{1-x^2}) < 0$ con $a>1 \iff 0<x-\sqrt{1-x^2}<1 \iff$

$$\begin{cases} x-1<\sqrt{1-x^2} & (1) \\ x>\sqrt{1-x^2} & (2) \end{cases} \qquad (1) \iff \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x-1<0 \end{cases} \vee \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-2x+\cancel{1}<\cancel{1}-x^2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x<1 \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 1 \\ 2x^2-2x<0 \quad\quad 0<x<1 \end{cases}$$

$$-1 \leq x < 1 \qquad \vee \qquad \emptyset$$

$$S: \; -1 \leq x < 1$$

- $-1 < \lg_3 (x-1) < 1 \iff 3^{-1} < x-1 < 3 \iff \frac{4}{3} < x < 4$
- $\lg_3 [\lg_{\frac{1}{3}} (1+3x)] > 0 \iff \lg_{\frac{1}{3}} (1+3x) > 1 \iff 0 < 1+3x < \frac{1}{3}$

  $\iff -1 < 3x < -\frac{2}{3} \iff -\frac{1}{3} < x < -\frac{2}{9}$.

• $\lg_5^2 x + \lg_5 x - 2 > 0$ Posto $\lg_5 x = y$ si ha

$y^2 + y - 2 > 0 \iff y < -2 \lor y > 1$ Ritornando a $\lg_5 x$ si ha

$\lg_5 x < -2 \lor \lg_5 x > 1 \iff 0 < x < \frac{1}{25} \lor x > 5.$

• $\sqrt{\lg_a (x-1)} > 0$ con $a \in \mathbb{R} \iff \lg_a (x-1) > 0$ con $a \in \mathbb{R}$

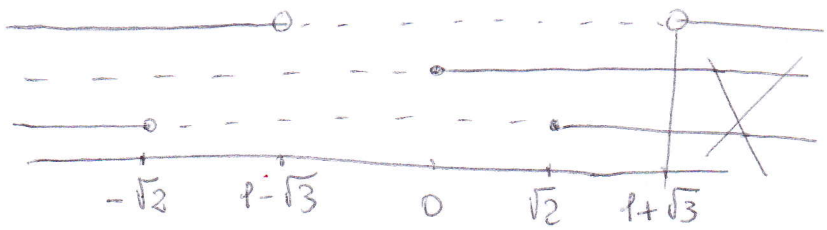
Se $a > 1$: $\lg_a (x-1) > 0 \iff x-1 > 1 \iff x > 2$

Se $0 < a < 1$: $\lg_a (x-1) > 0 \iff 0 < x-1 < 1 \iff 1 < x < 2$

• $\sqrt{\lg_a (x^2-1)} > \sqrt{\lg_a (2x+1)}$ con $a \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \lg_a (x^2-1) \geq 0 \\ \lg_a (2x+1) \geq 0 \\ \lg_a (x^2-1) > \lg_a (2x+1) \end{cases}$

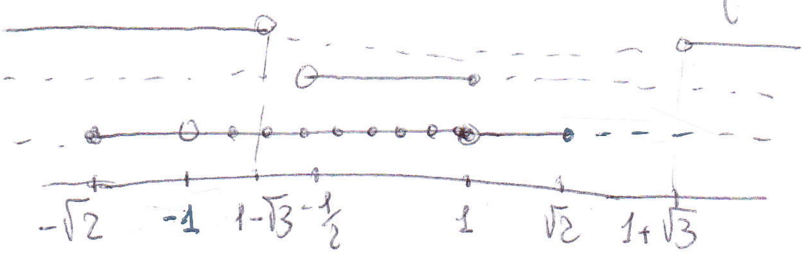
Se $a > 1$ il sistema diventa: $\begin{cases} x^2-1 \geq 1 \\ 2x+\cancel{1} \geq \cancel{1} \\ x^2-1 > 2x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \leq -\sqrt{2} \lor x \geq \sqrt{2} \\ x \geq 0 \\ x^2-2x-2 > 0 \end{cases}$

$x < 1-\sqrt{3} \lor x > 1+\sqrt{3}$



$x > 1+\sqrt{3}$

Se $0 < a < 1$ il sistema diventa $\begin{cases} 0 < x^2-1 \leq 1 \\ 0 < 2x+1 \leq 1 \\ x^2-1 < 2x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 < x \leq \sqrt{2} \lor -\sqrt{2} \leq x < -1 \\ -\frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 1-\sqrt{3} < x < 1+\sqrt{3} \end{cases}$



$\emptyset$

• $\lg_2 |4-x^2| < 1 \iff 0 < |4-x^2| < 2 \iff \begin{cases} 4-x^2 \neq 0 \\ 4-x^2 < 2 \\ 4-x^2 > -2 \end{cases} \iff \begin{cases} x \neq \pm 2 \\ 2 < x^2 < 6 \end{cases}$

$\iff -\sqrt{6} < x < -\sqrt{2} \lor \sqrt{2} < x < \sqrt{6},\ x \neq \pm 1.$

• $\log_{\frac12}(x^2+2) - \log_{\frac12}(x-2) \le \log_{\frac12}(x+1) \iff$

$$\begin{cases} x^2+2>0 \\ x-2>0 \\ x+1>0 \\ \log_{\frac12}\dfrac{x^2+2}{x-2} \le \log_{\frac12}(x+1) \end{cases} \iff \begin{cases} \forall x \\ x>2 \\ x>-1 \\ \dfrac{x^2+2}{x-2} \ge x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x>2 \\ \dfrac{x^2+2-(x+1)(x-2)}{x-2} \ge 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x>2 \\ \cancel{x^2}-\cancel{2}-\cancel{x^2}+2x-x+\cancel{2} \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x>2 \\ x>0 \end{cases} \qquad x>2$$

(tolgo il denominatore perché >0 per $x>2$)

• $\sqrt{(\log_2 x-3)(\log_2 x-1)} \ge \log_2 x+2 \Rightarrow$ Posto $\log_2 x = y$ si ha

$$\sqrt{(y-3)(y-1)} \ge y+2 \iff$$

$$\begin{cases} (y-3)(y-1)\ge 0 \\ y+2<0 \end{cases} \vee \begin{cases} y+2\ge 0 \\ (y-3)(y-1) \ge y^2+4y+4 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y\le 1 \vee y\ge 3 \\ y<-2 \end{cases} \vee \begin{cases} y\ge -2 \\ \cancel{y^2}-3y-y+3 \ge \cancel{y^2}+4y+4 \end{cases} \qquad y\le -\frac18$$

$y<-2 \quad \vee \quad -2\le y\le -\frac18$ Tornando a $\log_2 x$ si ha

$\log_2 x \le \frac18 \iff 0<x\le 2^{-\frac18}$

cioè $0<x<\frac{1}{\sqrt[8]{2}}$.

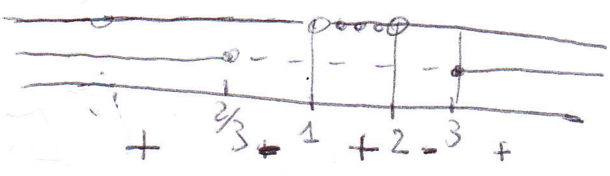
• $\dfrac{\log_3 x+1}{\log_3 x-1} - \dfrac{\log_3 x+2}{\log_3 x-2} + 3 \le 0$ Posto $\log_3 x = y$ si ha

$$\frac{(y+1)(y-2)-(y+2)(y-1)+3(y-1)(y-2)}{(y^2-1)(y-2)} \le 0$$

$N\ge 0 \quad \cancel{y^2}+\cancel{y}-\cancel{2y}-\cancel{2}-\cancel{y^2}-2y+\cancel{y}+\cancel{2}+3y^2-3y-6y+6\ge 0$

$3y^2-11y+6\ge 0 \qquad y\le \frac23 \vee y\ge 3$

$D>0 \quad (y^2-1)(y-2)>0 \quad y<+1 \vee y>2$



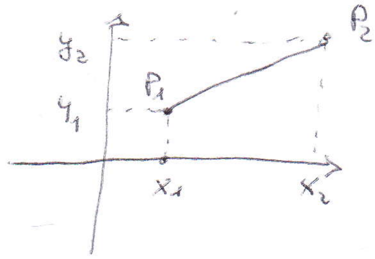
$\frac23 \le \log_3 x<1 \vee 2<\log_3 x\le 3$

$\sqrt[3]{9} \le x<3 \vee 9<x\le 27$

Richiami di Geometria analitica: equazione della retta

Fissiamo nel piano un sistema di riferimento ortogonale.

Dati 2 punti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$ la loro distanza d è data da



$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

(basta applicare il Teorema di Pitagora).

Le coordinate del punto medio M del segmento di estremi P_1 e P_2 sono date da $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

L'equazione $ax+by+c=0$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}, (a,b) \neq (0,0)$ rappresenta sempre una retta r del piano nel senso che dato $P(x_0, y_0)$ si ha che $P \in r \Leftrightarrow ax_0+by_0+c=0$ cioè $P \in r \Leftrightarrow$ le sue coordinate soddisfano l'equazione data.

Casi particolari

- Se $a=0$ l'eq. $by+c=0$ cioè $y=-\frac{c}{b}$ rappresenta una retta // asse x
- Se $b=0$ l'eq. $ax+c=0$ cioè $x=-\frac{c}{a}$ rappresenta una retta // asse y
- Se $c=0$ l'eq. $ax+by=0$ rappresenta una retta passante per l'origine.

L'equazione $ax+by+c=0$ si dice in forma implicita.

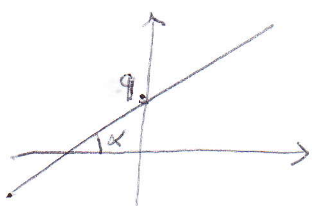
Se $b \neq 0$ ricavando y si ha $y=mx+q$ $\quad \left(\begin{array}{l} m=-\frac{a}{b} \\ q=-\frac{c}{b}\end{array}\right)$

che si dice eq. della retta in forma esplicita.

Al variare di m (coefficiente angolare) e q (termine noto) si ottengono tutte le rette del piano tranne quelle // asse y.

L'equazione $x=0$ rappresenta asse y

$y=0$ " " asse x



Data l'eq. $y=mx+q$, $m=\operatorname{tg}\alpha$ con α angolo formato dalla retta con il semiasse positivo delle x, q rappresenta l'ordinata del pto di intersezione della retta con l'asse y.

- Retta generica passante per $P_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad m \in \mathbb{R}$$

(al variare di $m \in \mathbb{R}$ si hanno tutte le rette per P_0 tranne quella // asse y di eq. $x = x_0$)

- Retta passante per due punti distinti $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{se } \begin{cases} x_1 \neq x_2 \\ y_1 \neq y_2 \end{cases}$$

Se invece $x_1 = x_2$ si ha la retta $x = x_1$

$y_1 = y_2$ si ha $y = y_1$

N.B. Il coefficiente angolare della retta congiungente P_1 e P_2 è dato da

$$m_{P_1P_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Retta per $P_0(x_0, y_0)$ parallela alla retta $y = mx + q$: $y - y_0 = m(x - x_0)$
- Retta per $P_0(x_0, y_0)$ perpendicolare a $y = mx + q$: $y - y_0 = -\frac{1}{m}(x - x_0)$

Intersezione di 2 rette si ottiene risolvendo il sistema formato dalle loro equazioni cioè

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 & r \\ a'x + b'y + c' = 0 & s \end{cases}$$

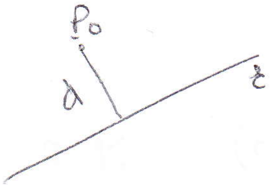
Se $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ il sistema è determinato e ha un'unica soluzione. Le rette r e s sono incidenti

Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ il sistema è impossibile, cioè $r \cap s = \emptyset$ le rette sono // e distinte

Se $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ il sistema è indeterminato perchè le 2 eq. coincidono. Le rette sono coincidenti

- Distanza di un punto P_0 da una retta di equazione $ax + by + c = 0$:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



- Scrivere l'equazione della retta passante per $(0, \frac{1}{3})$ e di coefficiente angolare $\sqrt{3}$. $y - \frac{1}{3} = \sqrt{3}(x-0)$ cioè $y = \sqrt{3}x + \frac{1}{3}$.

- Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $A(0, -\frac{12}{5})$ e $B(3, -\frac{6}{5})$ e verificare che passa per $C(2, -\frac{8}{5})$.

equazione della retta AB: $\dfrac{y+\frac{12}{5}}{-\frac{6}{5}+\frac{12}{5}} = \dfrac{x-0}{3-0} \iff y + \frac{12}{5} = \frac{\cancel{6}^{2}}{5}\frac{x}{\cancel{3}}$

$y = \frac{2}{5}x - \frac{12}{5}$

$C \in AB$ poiché le sue coordinate soddisfano l'eq. della retta essendo $-\frac{8}{5} = \frac{6}{5} \cdot 2 - \frac{12}{5}$ $-\frac{8}{5} = -\frac{8}{5}$ vero.

- Scrivere l'equazione della retta passante per l'origine e perpendicolare alla retta congiungente $A(\frac{2}{5}, \frac{3}{4})$ e $B(4, -\frac{1}{2})$.

$y = -\dfrac{1}{m_{AB}}x$ Poiché $m_{AB} = \dfrac{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}-4} = \frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{5}{18}\right) = -\frac{25}{72}$ si ha

$y = \frac{72}{25}x$

- Determinare per quale valore del parametro k la retta di equazione $(2k-1)x + 3y = 1+k$

1) è // asse x
2) è // $x+y=0$
3) è $\perp$ $2x+3y=6$.

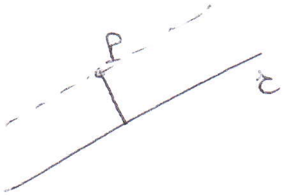
Poiché il coefficiente angolare è $m = \dfrac{1-2k}{3}$, $k \neq \frac{1}{2}$, si ha

1) è // asse x $\iff \dfrac{1-2k}{3} = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

2) è // $x+y=0 \iff \dfrac{1-2k}{3} = -1 \Rightarrow 1-2k = -3 \Rightarrow k = 2$

3) è $\perp$ $2x+3y=6 \iff \dfrac{1-2k}{3} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow 2-4k = 9 \Rightarrow k = -\frac{7}{4}$.

- Dal punto $(1,2)$ condurre la parallela alla retta $2x+y=1$ e trovare la distanza fra le due rette.



La retta $/\!/$ $2x+y-1=0$ per $P(1,2)$

ha equazione $\quad y-2=-2(x-1)$

$$2x+y-4=0$$

Per trovare la distanza fra le due rette basta calcolare la distanza di P da r:

$$d=\frac{|2\cdot 1+2\cdot 1-1|}{\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

- Verificare che il triangolo di vertici $A(2\sqrt{3},0)$, $B(0,2)$ e $C\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ è rettangolo e calcolarne il perimetro.

Per verificare che il triangolo è rettangolo basta trovare le misure dei 3 lati e verificare che formano una terna pitagorica.

Poiché $\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+4}=\sqrt{16}=4$ $\qquad \overline{BC}=\sqrt{\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}-2\right)^2}$

$$\overline{AC}=\sqrt{\left(\frac{3+4\sqrt{3}}{2}-2\sqrt{3}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{36}{4}}=3 \qquad =\sqrt{\frac{9+48+24\sqrt{3}+27+16-24\sqrt{3}}{4}}=5$$

e $3^2+4^2=5^2$ segue che il triangolo è rettangolo con perimetro $=12$.

- Verificare che il quadrilatero di vertici $A(2,2)$ $B(8,2)$ $C(10,5)$ e $D(4,5)$ è un parallelogramma ma non è un rettangolo.

Basta provare che i lati opposti sono a due a due paralleli.

Infatti $m_{AB}=0$ (i punti hanno stessa ordinata) $\quad m_{BC}=\frac{5-2}{10-8}=\frac{3}{2}$

$m_{CD}=0$ $\qquad m_{DA}=\frac{5-2}{4-2}=\frac{3}{2}$

Essendo $m_{AB}=m_{CD}$ e $m_{BC}=m_{DA}$ ho un parallelogramma che però non è un rettangolo perché 2 lati consecutivi non sono $\perp$.

- Determinare per quali valori del parametro k le rette di equazione

$$y=\frac{k}{2k-1}(x+1) \qquad e \qquad y=\frac{2k}{2-k}x-1+\frac{1}{2-k}$$

1) sono // ;

2) sono ⊥ ;

3) si incontrano sulla retta $y=4$;

4) si incontrano sulla retta $x=-1$.

Si osserva che i coefficienti angolari sono rispettivamente $\frac{k}{2k-1}$ e $\frac{2k}{2-k}$.

1) $\frac{k}{2k-1} = \frac{2k}{2-k} \Rightarrow k(2-k) = 2k(2k-1)$ con $k \neq 2 \wedge k \neq \frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2k - k^2 = 4k^2 - 2k \Rightarrow 5k^2 - 4k = 0 \Rightarrow k=0 \vee k = \frac{4}{5}$.

2) $\frac{k}{2k-1} = -\frac{2-k}{2k} \Rightarrow 2k^2 = (k-2)(2k-1)$ con $k \neq \frac{1}{2} \wedge k \neq 0$

$\cancel{2k^2} = \cancel{2k^2} - 5k + 2 \Rightarrow k = \frac{2}{5}$.

3) Metto a sistema le due equazioni sostituendo 4 al posto di y:

$$\begin{cases} 4 = \frac{k}{2k-1}(x+1) \\ 4 = \frac{2k}{2-k}x - 1 + \frac{1}{2-k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4(2k-1)}{k} - 1 \Rightarrow x = \frac{7k-4}{k} \\ 4+1 = \frac{2\cancel{k}}{2-k} \cdot \frac{7k-4}{\cancel{k}} + \frac{1}{2-k} \end{cases} \text{ con } k \neq 0$$

Facendo i conti nella 2ª eq. ~~14k-8+k+2=5(k-2) k≠2~~

$14k - 8 + 1 = 5(2-k)$ con $k \neq 0$, $k \neq 2$ $\Rightarrow 19k = 17 \Rightarrow k = \frac{17}{19}$.

4) Metto a sistema le due equazioni sostituendo -1 al posto di x:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{-2k}{2-k} - 1 + \frac{1}{2-k} \end{cases} \Rightarrow -\frac{2k}{2-k} - 1 + \frac{1}{2-k} = 0 \Rightarrow$$

$-2k - 2 + k + 1 = 0$ con $k \neq 0$

$\Rightarrow k = -1$

- Scrivere l'equazione del luogo dei punti $P(x,y)$ del piano per i quali risulta $\overline{PA}^2 - \overline{BB}^2 = 6$ essendo $A(2,3)$ e $B(5,0)$.

$(x-2)^2 + (y-3)^2 - (x-5)^2 - y^2 = 6 \iff$

$\cancel{x^2} - 4x + 4 + \cancel{y^2} - 6y + 6 - \cancel{x^2} - 25 + 10x - \cancel{y^2} = 6 \iff x - y = 3$.

Equazione della circonferenza di centro $P_0(x_0, y_0)$ e raggio $r>0$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ (basta ricordare che per definizione la circonferenza è il luogo dei punti equidistanti dal centro)

Facendo i conti si ha un'eq. del tipo

$x^2+y^2+ax+by+c=0$ dove $C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$

$r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$

N.B. Si ha una circonferenza purché $a^2+b^2-4c>0$.

Rette Tangenti ad una circonferenza

Si vogliono condurre dal punto $P(x_1, y_1)$ le rette tangenti ad una data circonferenza $\mathscr{C}$.

Consideriamo prima il caso in cui P sia esterno a $\mathscr{C}$

I° Metodo

Si scrive l'equazione della retta generica per P, si mette a sistema con l'equazione della circonferenza e si pone il discriminante dell'equazione risolvente del sistema uguale a 0.

II° Metodo

Si scrive l'eq. della retta generica per P e si impone che la distanza del centro dalla retta sia uguale al raggio.

Se invece $P \in \mathscr{C}$, oltre ai due metodi sopra indicati si può:

III° Metodo

Si scrive l'eq. della retta generica per P e si prende come coefficiente angolare l'antireciproco della retta PC.

- Scrivere l'equazione della circonferenza di centro $(-2, 1)$ e raggio 5.

$(x+2)^2+(y-1)^2=25$

Sviluppando i calcoli si ha $x^2+y^2+4x-2y-20=0$

- Data l'equazione
$$5x^2+5y^2-3x+10y-3=0$$
determinare il centro e il raggio della circonferenza che essa rappresenta.

L'equazione si riscrive come $x^2+y^2-\frac{3}{5}x+2y-\frac{3}{5}=0$

Il centro ha coordinate $-\frac{a}{2}=\frac{3}{10}$, $-\frac{b}{2}=-1$

il raggio vale $r=\sqrt{\frac{9}{100}+1+\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{169}{100}}=\frac{13}{10}$.

- Scrivere l'equazione della circonferenza passante per $A(-1,0)$, $B(2,3)$ e $C(1,-2)$ e determinarne centro e raggio.

Poiché l'equazione richiesta è del tipo
$$x^2+y^2+ax+by+c=0$$
imponendo il passaggio per i tre punti si ha

$$\begin{cases} 1-a+c=0 \\ 4+9+2a+3b+c=0 \\ 1+4+a-2b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=a-1 \\ 2a+3b+a-1+13=0 \\ a+2b+a-1+5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-1 \\ c=-4 \end{cases}$$

La circonferenza richiesta ha equazione $x^2+y^2-3x-y-4=0$ con centro $\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ e raggio $r=\sqrt{\frac{13}{2}}$.

- Determinare la lunghezza della corda staccata sulla retta r: $y-2x+8=0$ dalla circonferenza di centro $(0,-3)$ e passante per $A(-4,0)$.

Si ha
$$\begin{cases} -\frac{a}{2}=0 \\ -\frac{b}{2}=-3 \\ 16-4a+c=0 \quad (\text{passaggio per } A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=6 \\ c=16 \end{cases}$$

$x^2+y^2+6y+16=0$ equazione della circonferenza

Per trovare gli estremi della corda risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = 2x - 8 \\ x^2 + y^2 + 6y - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 8 \\ 5x^2 - 20x = 0 \end{cases} < \begin{matrix} x = 0 \\ x = 4 \end{matrix} \quad P(0,-8) \quad Q(4,0)$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}.$$

- Condurre dal punto $P(1,3)$ le tangenti alla circonferenza $x^2 + y^2 - 2x = 0$ (si noti che P è esterno a $\mathscr{C}$)

1° metodo

$$\begin{cases} y - 3 = m(x-1) \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = mx - m + 3 \\ x^2 + m^2x^2 + m^2 + 9 - 2m^2x + 6mx - 6m \end{cases}$$

$$(1+m^2)x^2 - 2(m^2 - 3m + 1)x + (m-3)^2 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = (m^2 - 3m + 1)^2 - (1+m^2)(m-3)^2 = 0 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{2}$$

$$y = \pm 2\sqrt{2}(x-1) + 3 \qquad \text{rette tangenti}$$

2° metodo

$t: y - 3 = m(x-1) \iff mx - y + 3 - m = 0 \qquad C(1,0)$

$r = 1$

$$d(P,t) = r \Rightarrow \frac{|m \cdot 1 - 0 + 3 - \cancel{m}|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \Rightarrow 9 = \sqrt{m^2+1}$$

$$m^2 = 8 \Rightarrow m = \pm 2\sqrt{2}.$$

- Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$ condurre le tangenti nei suoi punti di intersezione con l'asse x.

Si vede subito che $A(0,0)$ e $B(2,0)$ sono i punti di intersezione con asse x. Poiché $C(1,-1)$ e $m_{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1 \quad m_{BC} = 1$

le tangenti cercate sono: $t_A: y = x$ e $t_B: y = -(x-2)$

- Determinare le tangenti a $x^2 + y^2 - 8x = 0$ parallele alla retta $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Basta mettere a sistema la generica parallela $y = -\frac{1}{2}x + q$ con la circonferenza e porre $\Delta = 0$ oppure imporre $d(C,t) = r$.

Uso il 2° metodo: $d(C,t) = \frac{|4 - 2q|}{\sqrt{1+4}}$, $r = 4 \Rightarrow 4 - 2k = \pm 4\sqrt{5}$

$\Rightarrow k = 2(1 \pm \sqrt{5})$.

Parabola

Si dice parabola il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso, detto fuoco, e da una retta fissa, detta direttrice.

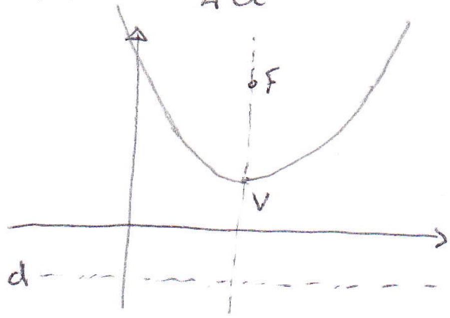
Equazione delle parabole con asse // asse y: $y = ax^2 + bx + c$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ vertice della parabola

$x = -\frac{b}{2a}$ asse di simmetria

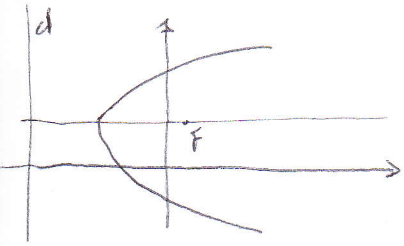
$y = -\frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a}$ eq. direttrice

$F\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1}{4a} - \frac{b^2-4ac}{4a}\right)$



Se la parabola ha asse di simmetria // asse x, avrà equazione

$x = ay^2 + by + c$ e le coordinate di F e V insieme alle equazioni dell'asse e della direttrice si ottengono dalle formule precedenti scambiando x con y.



Esercizi sulla parabola

- Trovare l'equazione della circonferenza che passa per il vertice e il fuoco della parabola $y^2 = 8x$ e ha centro sulla retta $r: x - y + 2 = 0$.

La parabola $y^2 = 8x$ ha asse // asse x anzi coincidente con l'asse x
$V(0,0)$ $\quad F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ $\quad$ essendo $a = 1$, $b = c = 0$.

Cerchiamo dunque l'equazione della circonferenza
$\mathcal{C}: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ imponendo che

$$\begin{cases} V \in \mathcal{C} \\ F \in \mathcal{C} \\ C \in r \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ \frac{1}{16} + \frac{1}{4}a + c = 0 \\ -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ a = -\frac{1}{4} \\ b = -\frac{1}{4} - 4 = -\frac{17}{4} \end{cases}$$

$$\mathcal{C}: x^2 + y^2 - \frac{1}{4}x - \frac{17}{4}y = 0$$

• Trovare a, b, c tali che la parabola $y = ax^2+bx+c$ passi per i punti $A(1,0)$, $B(2,1)$, $C(5,0)$. Trovare poi vertice, fuoco e direttrice della parabola.

$$\begin{cases} A \in P \\ B \in P \\ C \in P \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = a+b+c \\ 1 = 4a+2b+c \\ 0 = 25a+5b+c \end{cases} \iff \begin{cases} c = -a-b \\ 4a+2b-a-b=1 \\ 25a+5b-a-b=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} c = -a-b \\ b = 1-3a \\ 24a+4-12a \cancel{\ldots} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{5}{3} \\ b = 2 \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases} \qquad y = -\frac{1}{3}x^2+2x-\frac{5}{3}$$

$V\left(+3, \frac{4}{3}\right)$ $\qquad F\left(3, \frac{7}{12}\right)$ $\qquad d: \ y = \frac{25}{12}$

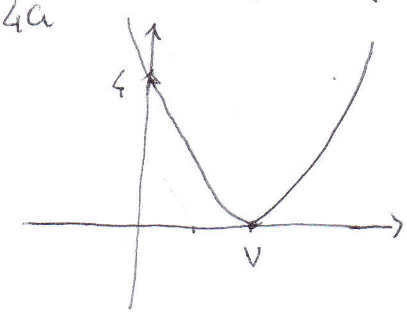
• Trovare per quale valore di K la parabola di equazione $y = x^2-4x+k^2$ ha il vertice sull'asse x.

Poiché $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$, basta imporre $-\frac{\Delta}{4a} = 0 \iff \Delta = 0 \iff b^2 = 4ac$

cioè $16 = 4k^2 \iff k = \pm 2$

Dunque $P: \ y = x^2-4x+4$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases}$$



• Scrivere l'equazione della parabola avente fuoco $(3,4)$ e direttrice $y=5$. Trovare le tangenti alla parabola nei suoi pti O e A di intersezione con l'asse x.

$y = ax^2+bx+c$ dove $x_F = -\frac{b}{2a} = 3$, $y_F = \frac{1-\Delta}{4a} = 4$, $\frac{-1-\Delta}{4a} = 5$ $\Rightarrow$

$$\begin{cases} b = -6a \\ 1-b^2+4ac = 16a \\ -1-b^2+4ac = 20a \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 3 \\ c = 0 \end{cases}$$

$2 \quad // \quad // \quad = -4a$

$y = -\frac{1}{2}x^2+3x$

$O(0,0)$ $\qquad A(6,0)$ $\qquad$ Per trovare l'equazione della tangente a P in $(0,0)$ metto a sistema la retta generica per O

con la parabola e impongo $\Delta = 0$

$$\begin{cases} y = mx \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x \end{cases} \qquad -\frac{1}{2}x^2 + 3x = mx \qquad -\frac{1}{2}x^2 + (3-m)x = 0$$

$$\Delta = (3-m)^2 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$y = 3x$ retta tangente per O

Ragionando analogamente per $A(6,0)$:

$$\begin{cases} y - 0 = m(x-6) \\ y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 3x = mx - 6m$$

$$x^2 - 2(m+3)x + 12m = 0 \qquad \frac{\Delta}{4} = (m-3)^2 + 12m = (m+3)^2$$

$$\frac{\Delta}{4} = 0 \Rightarrow m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3$$

$y = -3x$ retta tangente per A

Ellisse

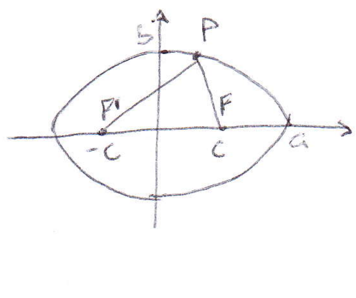
Si dice ellisse il luogo dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

Scelgo un sistema di riferimento avente l'asse x passante per i fuochi e l'asse y perpendicolare nel punto medio tra i fuochi, posto

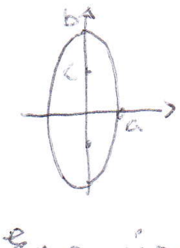
$FF' = 2c \qquad \overline{PF} + \overline{PF'} = 2a \qquad (a > c)$ si ha l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{dove } b^2 = a^2 - c^2$$

$e = \frac{c}{a}$ eccentricità



Se invece l'ellisse ha i fuochi sull'asse y allora $b > c$ e $a^2 = b^2 - c^2$.



Esercizi

- Determinare a, b in modo che l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ passi per $P(3,1)$ e $Q(-1,2)$. Determinare poi semiassi, semidistanza focale ed eccentricità.

$$\begin{matrix} P \in \mathcal{E} \\ Q \in \mathcal{E} \end{matrix} \iff \begin{cases} \frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{1}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases} \qquad \text{Posto } \begin{cases} u = \frac{1}{a^2} \\ v = \frac{1}{b^2} \end{cases} \text{ si ha } \begin{cases} 9u + v = 1 \\ u + 4v = 1 \end{cases}$$

$\begin{cases} u = 1-4v \\ 9-36v+v=1 \end{cases}$ $\begin{cases} u = \frac{3}{35} \\ v = \frac{8}{35} \end{cases}$ e quindi $a^2 = \frac{35}{3}$, $b^2 = \frac{35}{8}$ e l'equazione cercata è $\frac{x^2}{\frac{35}{3}} + \frac{y^2}{\frac{35}{8}} = 1$. I semiassi sono $a = \sqrt{\frac{35}{3}}$, $b = \sqrt{\frac{35}{8}}$, la semidistanza focale è $c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{\frac{35}{3} - \frac{35}{8}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{6}}$, l'eccentricità vale $e = \frac{c}{a} = \frac{\frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{6}}}{\sqrt{\frac{35}{3}}} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{6} \cdot \frac{3}{35}} = \frac{5}{2\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{20} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

- Trovare l'equazione dell'ellisse con eccentricità $e = \frac{2}{3}$ e fuochi $(-5,0)$ e $(5,0)$.

$\begin{cases} e = \frac{2}{3} \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{2}{3}a \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{15}{2} \\ c = 5 \end{cases}$ $b^2 = a^2 - c^2 = \frac{225}{4} - 25 = \frac{125}{4}$

L'ellisse ha equazione $\frac{x^2}{\frac{225}{4}} + \frac{y^2}{\frac{125}{4}} = 1$.

- Scrivere l'equazione dell'ellisse che interseca asse x nei punti $(\pm 5, 0)$ e ha fuoco nei punti $(\pm 3, 0)$.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dove $a = 5$, $c = 3$ $\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

- Trovare vertici e fuochi dell'ellisse $4x^2 + 9y^2 = 16$.

In forma normale l'equazione diventa $\frac{x^2}{\frac{16}{4}} + \frac{y^2}{\frac{16}{9}} = 1$

quindi $a^2 = \frac{16}{4} = 4$, $b^2 = \frac{16}{9}$ e $c = \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{16(9-4)}{36}} = \frac{4}{6}\sqrt{5} = \frac{2}{3}\sqrt{5}$.

I vertici sono $(\pm 2, 0)$ e $(0, \pm \frac{4}{3})$, i fuochi $(\pm \frac{2}{3}\sqrt{5}, 0)$.

- Trovare le rette tangenti all'ellisse $3x^2 + 5y^2 = 2$ e // retta: $y = x$.

Basta prendere la generica retta // $y = x$, mettere a sistema con l'equazione dell'ellisse e porre $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente.

$\begin{cases} y = x + q \\ 3x^2 + 5y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 3x^2 + 5x^2 + 5q^2 + 10qx = 2$

$8x^2 + 10qx + 5q^2 - 2 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = 0 \Rightarrow$ ~~$25q^2 - (\ldots)(5q^2-2) = 0$~~ $\Rightarrow 25q^2 - 8(5q^2-2) = 0$

$15q^2 = 16 \Rightarrow q = \sqrt{\frac{16}{15}} = \frac{4}{15}\sqrt{15}$ $y = x + \frac{4}{15}\sqrt{15}$.

• Date la parabola $y = x^2 + 1$ e la retta $y = 3x - 1$, si indichino con P e Q le intersezioni di queste due curve. Scrivere poi l'equazione dell'ellisse che ha semiasse maggiore $= \overline{PQ}$ e l'eccentricità $= \frac{1}{2}$.

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 1 = 3x - 1 \qquad x^2 - 3x + 2 = 0 \qquad x_{1/2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$P \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad Q \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases} \qquad \overline{PQ} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}.$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{10} \\ \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{10} \\ c = \frac{1}{2}\sqrt{10} \end{cases} \qquad b^2 = a^2 - c^2 = 10 - \frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{4}_{\,2}} = \frac{15}{2} \qquad \mathcal{E}: \frac{x^2}{\frac{15}{2}} + \frac{y^2}{10} = 1$$

Iperbole

Si chiama iperbole il luogo dei punti del piano per cui è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

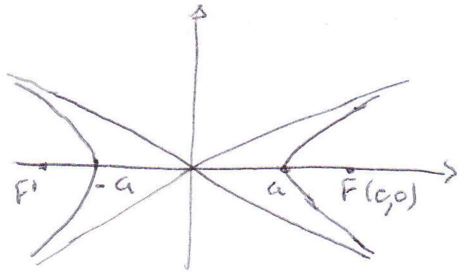
Scelto un sistema di riferimento avente l'asse x passante per i fuochi e l'asse y perpendicolare nel punto medio dei fuochi, posto $\overline{FF'} = 2c$ e $\overline{PF} - \overline{PF'} = 2a$ $(a < c)$ si ha l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dove $b^2 = c^2 - a^2$

$V(\pm a, 0)$ vertici

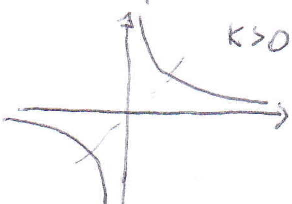
$y = \pm \frac{b}{a} x$ asintoti



asse x è trasverso, asse y non trasverso.

Se $a = b$ l'iperbole si dice equilatera e ha equazione $x^2 - y^2 = 0$.
Gli asintoti sono le bisettrici $y = \pm x$.

Se si effettua una rotazione di 45° degli assi, l'iperbole equilatera ha equazione $xy = k$ e gli asintoti coincidono con gli assi cartesiani

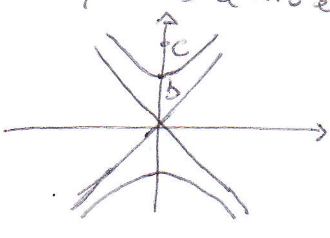


N.B. Se l'iperbole ha i fuochi sull'asse y, l'equazione diventa

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

$V(0, \pm b)$

$c > b \quad a^2 = c^2 - b^2$



Se $a = b$ l'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti ha equazione $xy = k$ $\quad k < 0$

- Trovare equazione dell'iperbole i cui fuochi sono $(\pm 4, 0)$ e i vertici $(\pm 3, 0)$.

$\begin{cases} c = 4 \\ a = 3 \end{cases}$ $\quad b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 8 = 9 \quad$ $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ iperbole equilatera

- Trovare equazione dell'iperbole di asintoti le rette $y = \pm \frac{3}{5}x$ e fuochi $(\pm 2, 0)$.

$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{3}{5} \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = \frac{3}{5}a \\ b^2 = c^2 - a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 \\ b = \frac{3}{5}a \\ \frac{9}{25}a^2 = 4 - a^2 \end{cases}$ $\quad b = \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{\sqrt{34}}^2 \quad a^2 = \frac{100}{34} \quad \dfrac{x^2}{\frac{100}{34}} - \dfrac{y^2}{\frac{36}{34}} = 1$

- Nell'equazione dell'iperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ determinate a in modo che l'iperbole sia tangente alla retta $y = x + 1$.

$\begin{cases} y = x + 1 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow 4x^2 - (x+1)^2 a^2 = 4a^2 \quad (4 - a^2)x^2 - 2a^2 x - 5a^2 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = 0 \Leftrightarrow a^4 + 5a^2(4 - a^2) = 0 \Rightarrow a^2(5 - 4a^2) = 0$

$\Rightarrow a^2 = \frac{5}{4} \vee a^2 = 0$ non accett. $\quad \dfrac{x^2}{\frac{5}{4}} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

- Trovare l'equazione dell'iperbole equilatera passante per $(5, 0)$.

$x^2 - y^2 = a^2 \quad a^2 = 25 \quad$ cioè $x^2 - y^2 = 25$.

- Scrivere l'equazione della tangente all'iperbole $x^2 - 4y^2 = 1$ nel suo punto di ascisse 4 e ordinate positiva.

$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 1 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow y^2 = \frac{15}{4} \quad P\left(4, \frac{\sqrt{15}}{2}\right) \quad \begin{cases} y - \frac{\sqrt{15}}{2} = m(x - 4) \\ x^2 - 4y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$

$x^2 - 4\left(\frac{\sqrt{15}}{2} + mx - 4m\right)^2 = 1 \Rightarrow (1 - 4m^2)x^2 - 4(\sqrt{15}m - 8m^2)x - 64m^2 + 16\sqrt{15}m - 16 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = 0 \quad 4(15m^2 + \cancel{64m^4 - 16\sqrt{15}m^3}) + \cancel{64}m^2 - 16\sqrt{15}m + 16 - \cancel{256m^4} + \cancel{64\sqrt{15}m^3} - \cancel{64m^2} = 0$

$\Rightarrow 15m^2 - 8\sqrt{15}m + 4 = 0 \quad (\sqrt{15}m - 4)^2 = 0 \Rightarrow m = \frac{4}{\sqrt{15}} \Rightarrow y = \frac{4}{\sqrt{15}}x + \frac{\sqrt{15}}{2} - 4\frac{\sqrt{15}}{2}$

- Trovare equazione iperbole equilatera avente come asintoti gli asse cartesiani e tangente alla retta $y = x + 1$.

$\begin{cases} xy = k \\ y = x + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + x - k = 0 \quad \Delta = 0 \Leftrightarrow 1 + 4k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$.

L'iperbole ha equazione $xy = -\frac{1}{4}$